

Ασκήσεις και Εργαστήριο 6: Κυκλώματα RL υπό Ημιτονοειδείς Διεγέρσεις

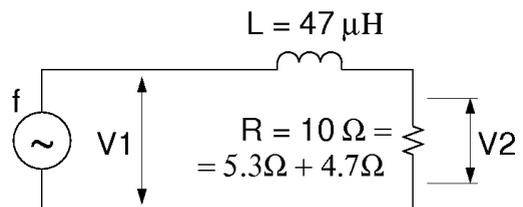
28 - 29 Μαρτίου 2011 (βδομάδα 7)

Διαβάστε επιλεγμένα θέματα σχετικά με την απόκριση μόνιμης κατάστασης κυκλωμάτων που περιέχουν αντιστάσεις, πυκνωτές, και πηνία, και των οποίων οι πηγές είναι ημιτονοειδείς συναρτήσεις του χρόνου, δεδομένης συχνότητας (και ενδεχομένως διαφόρων φάσεων). Διαβάστε για τα θέματα αυτά:

- Η γενική ιδέα του τι συμβαίνει σε κυκλώματα RLC υπό ημιτονοειδείς πηγές (όλα τα ρεύματα και όλες οι τάσεις είναι επίσης ημιτονοειδείς, της ίδιας συχνότητας, αλλά ενδεχομένως διαφορετικής φάσης), πώς απλοποιούμε την ανάλυσή τους (φανταζόμαστε ότι οι πηγές και όλα τα ρεύματα και οι τάσεις είναι οι προβολές στο οριζόντιο άξονα (το "πραγματικό μέρος") διδιάστατων (μγαδικών) μεγεθών που "περιστρέφονται" γύρω από την αρχή των αξόνων, όλα με την ίδια γωνιακή ταχύτητα, αλλά με διάφορα πλάτη και φάσεις), και τι είναι η τεχνική των "φασόρων" (έναν μιγαδικό αριθμό, σταθερός --δηλαδή που δεν είναι συνάρτηση του χρόνου-- και ο οποίος πολλαπλασιάζει μία μιγαδική συνάρτηση του χρόνου η οποία "περιστρέφεται" γύρω από την αρχή των αξόνων, με αποτέλεσμα να της αλλάζει πλάτος και φάση): Βιβλίο Agarwal-Lang: §13.1 και §13.2 (εκτός 13.2.3) --σελ. 703-712 (ή βιβλίο Rizzoni: σελ. 211-220).
- Σύνθετη αντίσταση (εμπέδηση - Impedance) ωμικής αντίστασης, χωρητικότητας, και αυτεπαγωγής: Βιβλίο Agarwal-Lang: σελ. 713-716 (ή βιβλίο Rizzoni: σελ. 221-225).

Άσκηση 6.1 Απόκριση Συχνότητας Βαθυπερατού Φίλτρου LR

Θεωρήστε το κύκλωμα πηνίου και αντίστασης που φαίνεται δεξιά. Η αντίσταση $R = 10 \Omega$ προορίζεται να παραστήσει το άθροισμα της εσωτερικής αντίστασης του πηνίου (το πολύ 5.8Ω κατά τον κατασκευαστή --ας πούμε μέση τιμή 5.3Ω εμείς εδώ) και μιάς εξωτερικής, δικής μας αντίστασης 4.7Ω στο πείραμα 6.4 παρακάτω. Η πηγή παρέχει ημιτονοειδή τάση V_1 , συχνότητας f (Hz = cycles/s) και γωνιακής ταχύτητας $\omega = 2\pi * f$ (rad/s).



Από τη θεωρία ξέρουμε ότι, για τη δεδομένη συχνότητα f και γωνιακή ταχύτητα ω , η σύνθετη αντίσταση (εμπέδηση - impedance) του πηνίου είναι $Z_L = j\omega L$ (μιγαδικός αριθμός --όπου j είναι η φανταστική μονάδα), η εμπέδηση της αντίστασης είναι $Z_R = R$, και η συνολική εμπέδηση των δύο στοιχείων εν σειρά είναι το άθροισμα, $R + j\omega L$. Από τον διαιρέτη τάσης προκύπτει ότι ο λόγος τάσης εξόδου προς τάση εισόδου (η συνάρτηση μεταφοράς) είναι $V_2/V_1 = R / (R + j\omega L) = 1 / [1 + j\omega(L/R)]$. Η διαίρεση αυτή, μιγαδικών αριθμών, γίνεται ευκολότερα σε πολικές συντεταγμένες: αν εκφράσουμε τον παρονομαστή σαν μέτρο και γωνία, τότε ο αντίστροφός του έχει το αντίστροφο μέτρο και την αντίθετη γωνία. Ο μιγαδικός αριθμός που προκύπτει (συνάρτηση μεταφοράς) μας δίνει τη σχέση τάσης εξόδου, V_2 , ως προς τάση εισόδου, V_1 : πολλαπλασιάζοντας την V_1 επί τη συνάρτηση μεταφοράς προκύπτει η V_2 , δηλαδή το μέτρο της V_2 είναι το μέτρο της V_1 επί το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς, και η συνημιτονοειδής καμπύλη της V_2 σαν συνάρτηση του χρόνου προπορεύεται εκείνης της V_1 κατά τη γωνία της συνάρτησης μεταφοράς. Εδώ, που η συνάρτηση μεταφοράς έχει μέτρο μικρότερο της μονάδας και γωνία αρνητική, η τάση εξόδου θα είναι μικρότερη της τάσης εισόδου, και η συνημιτονοειδής καμπύλη της εξόδου θα έπεται χρονικά εκείνης της εισόδου.

Υπολογίστε το μέτρο και τη γωνία της παραπάνω συνάρτησης μεταφοράς για το κύκλωμα του

σχήματος ($L = 47 \mu\text{H}$, $R = 10 \Omega$), για κάθε μία από τις εξής συχνότητες πηγής: 1 kHz, 2 kHz, 4 kHz, 8 kHz, 16 kHz, 25 kHz, **34 kHz**, 50 kHz, 65 kHz, 125 kHz, 250 kHz, 500 kHz, και 1 MHz. Στην παραπάνω "γκάμα" συχνοτήτων, η "κεντρική" συχνότητα, 34 kHz, υποδεικνύει το "γόνατο" της συνάρτησης μεταφοράς (τη "συχνότητα αποκοπής"): εκεί όπου ο παρονομαστής γίνεται $(1+j)$, δηλαδή η γωνιακή ταχύτητα ισούται με 1 rad ανά σταθερά χρόνου του κυκλώματος (σταθερά χρόνου = L/R). Όπως θα διαπιστώσετε, στις πολύ "χαμηλές" συχνότητες (πολύ χαμηλότερες από τη συχνότητα αποκοπής), η έξοδος V_2 είναι σχεδόν ίση με την είσοδο V_1 (συνάρτηση μεταφοράς ≈ 1), αφού τα πηνία συμπεριφέρονται σαν βραχυκύκλωμα στις χαμηλές συχνότητες: αντίθετα, στις πολύ "ψηλές" συχνότητες (πολύ ψηλότερες από τη συχνότητα αποκοπής), η έξοδος είναι πολύ μικρότερη από την είσοδο (μέτρο συνάρτησης μεταφοράς $\ll 1$), αφού τα πηνία συμπεριφέρονται σαν ανοικτό κύκλωμα στις ψηλές συχνότητες --εξ ου και το όνομα "βαθυπερατό φίλτρο".

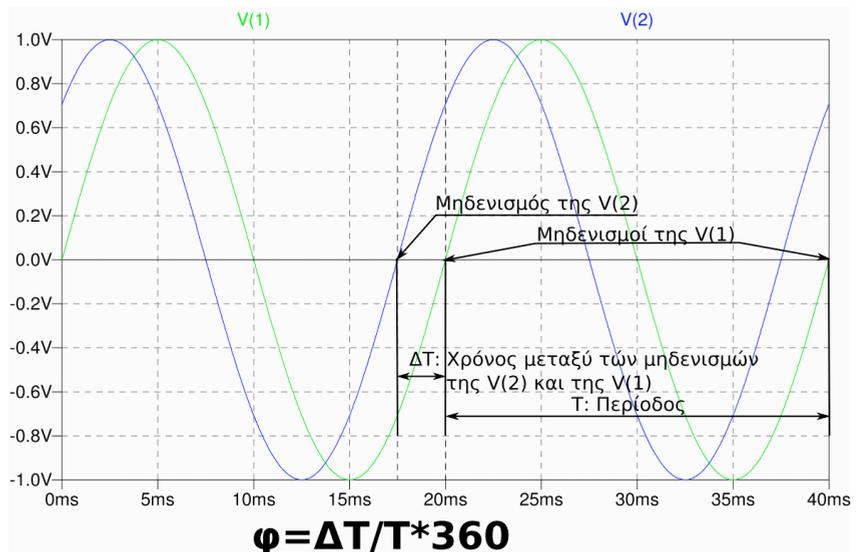
Πείραμα 6.2 Βαθυπερατό Φίλτρο LR στο Εργαστήριο

Κατασκευάστε στο εργαστήριο το κύκλωμα της άσκησης 6.1 παραπάνω και μετρήστε τη συνάρτηση μεταφοράς του. Στο εργαστήριο θα βάλετε μόνο την αντίσταση 4.7Ω --τα υπόλοιπα είναι η εσωτερική αντίσταση του πηνίου (της οποίας την πραγματική τιμή μετρήστε προηγουμένως --εκτός κυκλώματος!-- με το ωμόμετρο). Χρησιμοποιήστε την παλμογεννήτρια, σε ημιτονοειδές σήμα, σαν πηγή, το κανάλι 1 του παλμογράφου για να βλέπετε την τάση V_1 , και το κανάλι 2 για να βλέπετε την V_2 . Επειδή η V_2 είναι η τάση πάνω στα 4.7Ω μόνο από την περίπου διπλάσια ολική αντίσταση μετά την V_1 , οι τάσεις V_2 που θα βλέπετε εδώ θα είναι περίπου οι μισές από αυτές που υπολογίσατε στην άσκηση 6.1.

Προσοχή: Ρυθμίστε την τάση της πηγής σε σχετικά χαμηλές τιμές, τουλάχιστο για τις συχνότητες εκείνες που η εμπέδηση του πηνίου δεν είναι πολύ μεγάλη: η πηγή μεν μπορεί να δώσει γύρω στα 10 Volt (αν και πιθανότατα αυτή πέφτει με την τόσο μικρή αντίσταση φορτίου σε σχέση με την εσωτερική αντίσταση των $\sim 50 \Omega$ της πηγής), αν όμως τέτοιες ψηλές τάσεις εμφανιστούν πάνω στην τόσο χαμηλή αντίσταση $R=4.7\Omega$, αυτή θα καεί! Παραδειγματός χάριν, και για ευκολία μετρήσεων, ρυθμίστε την τάση κορυφής της πηγής στο 1 Volt, οπότε η τάση κορυφής της V_2 θα ισούται με το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς. Μόνο στις πολύ ψηλές συχνότητες, όπου η συνάρτηση μεταφοράς παίρνει εξαιρετικά μικρές τιμές (δηλαδή η εμπέδηση του πηνίου είναι πολύ μεγάλη, άρα σχεδόν όλη η τάση της πηγής "πέφτει" πάνω στο πηνίο, και πολύ λίγη στην αντίσταση), εάν η τάση V_2 είναι τόσο μικρή που η μέτρησή της καθίσταται προβληματική, τότε ανεβάστε την τάση πηγής π.χ. στα 10 Volt για να πάρετε ευκρινέστερες μετρήσεις. Σε κάθε αλλαγή συχνότητας, πιθανότατα να πρέπει να ξαναρυθμίσετε την τάση πηγής, για να διατηρείται η V_1 στο επίπεδο που την θέλετε, δεδομένου ότι η πηγή σας δεν είναι ιδανική, δηλαδή η εσωτερική της αντίσταση ($\sim 50 \Omega$) δεν είναι μηδέν.

Μετρήστε το μέτρο και τη γωνία της συνάρτησης μεταφοράς για κάθε μία από τις συχνότητες της άσκησης 6.1 (και πιθανόν και για περισσότερες) --για τη μέτρηση γωνίας δείτε το σχήμα δεξιά και το κείμενο παρακάτω.

Απεικονίστε τόσο τους υπολογισμούς σας της άσκησης 6.1 όσο και τις μετρήσεις σας αυτού του πειράματος στο χαρτί millimetre με λογαριθμική κλίμακα συχνοτήτων (οριζόντια) που σας



δίνεται [PDF]. Για το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς, χρησιμοποιήστε λογαριθμική κλίμακα και στον κατακόρυφο άξονα· για τη γωνία, προτιμήστε γραμμική κλίμακα, στον κατακόρυφο άξονα. **Συγκρίνετε** τις τιμές των υπολογισμών με τις τιμές των μετρήσεων, και εξηγήστε/σχολιάστε τυχόν αποκλίσεις. Επίσης, παρατηρήστε ότι η τάση V_2 είναι ανάλογη προς το ρεύμα του κυκλώματος, αφού είναι τάση πάνω σε μία αντίσταση· άρα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στο κανάλι 2 του παλμογράφου βλέπουμε το ρεύμα του πηνίου. Στις ψηλές συχνότητες, όταν V_2 πολύ μικρή, η τάση του πηνίου, V_1-V_2 , είναι σχεδόν ίση με την V_1 , άρα είναι σχεδόν ό,τι βλέπουμε στο κανάλι 1. Υπ' αυτές τις συνθήκες, ελέγξτε ότι όντως η τάση του πηνίου, σε κάθε χρονική στιγμή, είναι ανάλογη προς την παράγωγο του ρεύματος που περνά από μέσα του εκείνη τη στιγμή.

Μέτρηση Διαφοράς Φάσης (γωνίας): Η μέτρηση της διαφοράς φάσης έχει νόημα όταν και τα δύο σήματα είναι περιοδικά και με την ίδια περίοδο (και επομένως και συχνότητα), και την ίδια μορφή. Βασικά, ανάγεται στη μέτρηση της χρονικής απόστασης μεταξύ αντιστοιχών σημείων των δύο κυματομορφών, σε σχέση με την (κοινή τους) περίοδο. Σαν αντιστοιχία σημεία μπορούν να επιλεγούν, ανάλογα με τα σήματα, π.χ. τα σημεία ελαχίστου, ή μεγίστου, ή μηδενισμού (και με την ίδια κατεύθυνση και τα δύο --ανερχόμενα ή κατερχόμενα-- προκειμένου για τα σημεία μηδενισμού). Για ημιτονοειδή σήματα, τα σημεία μηδενισμού έχουν το πλεονέκτημα της ακριβέστερης μέτρησης, επειδή εκεί η καμπύλη έχει τη μέγιστη κλίση. Στον παλμογράφο, για να βρείτε τα σημεία μηδενισμού πρέπει να ξέρετε πού (κατακόρυφα) είναι η θέση του μηδενός: αυτήν την ρυθμίζετε εσείς από το κουμπί (VERTICAL) "POSITION". όταν πατήσετε το κουμπί "GND", βλέπετε στην οθόνη μάν οριζόντια γραμμή στη θέση του μηδενός, οπότε και μπορείτε να ρυθμίσετε το μηδέν εκεί που το θέλετε.

Προκειμένου για τα ημιτονοειδή σήματα στο σχήμα που δίδεται, όπου $v_1(t) = A_1 \sin(\omega t)$ και $v_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \phi)$, το $v_1(t)$ μηδενίζεται (ανερχόμενο) όταν $\omega t_1 = 2\pi k$ (όπου k ακέραιος), δηλαδή για $t_1 = kT$, ενώ το $v_2(t)$ μηδενίζεται (ανερχόμενο) όταν $\omega t_2 + \phi = 2\pi k$, δηλαδή για $t_2 = kT - (\phi/2\pi)T$, όπου $T = 2\pi/\omega$ είναι η κοινή περίοδος των δύο σημάτων. Η χρονική απόσταση μεταξύ των μηδενισμών είναι τότε $\Delta T = t_1 - t_2 = (\phi/2\pi)T$, από την οποία προκύπτει η ζητούμενη μέτρηση: $\phi = 2\pi(\Delta T/T)$ (όταν η γωνία μετράται σε ακτίνια), ή $\phi = 360(\Delta T/T)$ (όταν η γωνία μετράται σε μοίρες).

Η διαφορά φάσης της v_2 ως προς την v_1 θεωρείται θετική όταν το σήμα 2 προηγείται χρονικά του σήματος 1, δηλαδή όταν πρώτα μηδενίζεται το σήμα 2 και μετά το 1, ή όταν τα σημεία μηδενισμού του 2 είναι αριστερά από εκείνα του 1, όπως στο παραπάνω σχήμα. Στην αντίθετη περίπτωση, η διαφορά φάσης θεωρείται αρνητική --κατά σύμβαση επιλέγουμε τη διαφορά φάσης μεταξύ -180 και $+180$ μοιρών.

[Up to the Home Page of CS-121](#)

© copyright University of Crete, Greece.
last updated: 23 Mar. 2011, by [M. Katevenis](#).