

Ασκήσεις και Εργαστήριο 7: Κυκλώματα RC και RLC υπό Ημιτονοειδείς Διεγέρσεις

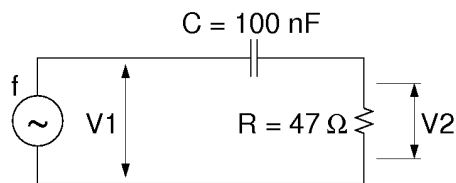
2 - 5 Απριλίου 2012 (βδομάδα 8)

Διαβάστε επιλεγμένα θέματα σχετικά με την απόκριση μόνιμης κατάστασης κυκλωμάτων που περιέχουν αντιστάσεις, πυκνωτές, και πηνία, και των οποίων οι πηγές είναι ημιτονοειδείς συναρτήσεις του χρόνου, δεδομένης συχνότητας (και ενδεχομένως διαφόρων φάσεων), σε συνέχεια αυτών που ήδη διαβάσατε για το εργαστήριο 6 -- διαβάστε για τα θέματα αυτά:

- Παραδείγματα εφαρμογής της θεωρίας του εργαστηρίου 6: Βιβλίο Agarwal-Lang: σελ. 717-724 (πό πολύπλοκα παραδείγματα, που δεν τα καλύψαμε: σελ. 724-731) (ή βιβλίο Rizzoni: σελ. 226-228 και 233-234· πό πολύπλοκα, που δεν τα καλύψαμε: σελ. 229-232 και 235-249).
- Εφαρμογή των παραπάνω στη μελέτη της συμπεριφοράς των κυκλωμάτων RC και RL σαν βαθυπερατά (low-pass) ή υψιπερατά (high-pass) φίλτρα: απόκριση συχνοτήτων, και η αναπαράστασή της σε λογαριθμικές κλίμακες, decibel, και οκτάβες. Τις εφαρμογές αυτές θα τις βρείτε στο βιβλίο Agarwal-Lang, §13.4, σελ. 731-743, και επίσης αποτελούν και το αντικείμενο των παρακάτω ασκήσεων και εργαστηριακών πειραμάτων (το αντίστοιχο υλικό στο βιβλίο Rizzoni βρίσκεται στο κεφάλαιο 5: §5.3, §5.4). (Επιπλέον εφαρμογές --που δεν τις είπαμε στο μάθημα-- σε φίλτρα, ηχεία, και ενισχυτές μπορείτε να βρείτε στο βιβλίο Agarwal-Lang, §13.5 και §13.6, σελ. 744-757).
- Ισχύς και ενέργεια ημιτονοειδών τάσεων-ρεύματων: RMS (root-mean-square) τάση/ρεύμα = $0.707 \cdot \text{peak τάση/ρεύμα}$, ισχύς = τάση RMS * ρεύμα RMS * συνημίτονο της γωνίας διαφοράς φάσης τάσης-ρεύματος: Βιβλίο Agarwal-Lang: §13.7, σελ. 757-764 (στο βιβλίο Rizzoni, λίγα για τιμές RMS υπάρχουν στις σελ. 206-208, ενώ το πλήρες αντίστοιχο υλικό βρίσκεται στο κεφάλαιο 6: §6.1, §6.2).

Άσκηση 7.1 Απόκριση Συχνοτήτων Υψιπερατού Φίλτρου RC

Θεωρήστε το κύκλωμα πυκνωτή - αντίστασης που φαίνεται δεξιά. Κατ' αντιστοιχία προς το κύκλωμα $\underline{L}$ του εργαστηρίου 6, για τη δεδομένη συχνότητα f και γωνιακή ταχύτητα ω , η εμπέδηση του πυκνωτή είναι $Z_C = 1/j\omega C$, η εμπέδηση της αντίστασης είναι $Z_R = R$, και η συνολική εμπέδηση των δύο στοιχείων εν σειρά είναι το άθροισμα, $R + 1/j\omega C$. Από τον διαιρέτη τάσης προκύπτει ότι η συνάρτηση μεταφοράς είναι $V_2/V_1 = R / [R + (1/j\omega C)] = j\omega RC / (1 + j\omega RC)$. Εδώ, η συνάρτηση μεταφοράς έχει και πάλι μέτρο μικρότερο της μονάδας, αλλά γωνία θετική, επομένως η τάση εξόδου θα είναι μικρότερη της τάσης εισόδου, και η συνημιτονοειδής καμπύλη της εξόδου θα προπορεύεται χρονικά εκείνης της εισόδου.



Υπολογίστε όπως και στην άσκηση 6.1 το μέτρο και τη γωνία της συνάρτησης μεταφοράς για το κύκλωμα του σχήματος ($C = 100 \text{ nF}$, $R = 47 \Omega$), για κάθε μία από τις ίδιες συχνότητες πηγής: 1 kHz, 2 kHz, 4 kHz, 8 kHz, 16 kHz, 25 kHz, **34 kHz**, 50 kHz, 65 kHz, 125 kHz, 250 kHz, 500 kHz, και 1 MHz. Και πάλι η "κεντρική" συχνότητα, 34 kHz, είναι η συχνότητα αποκοπής, εκεί όπου ο παρονομαστής γίνεται $(1+j)$, δηλαδή η γωνιακή ταχύτητα ισούται με 1 rad ανά σταθερά χρόνου του κυκλώματος (σταθερά χρόνου = RC --και εδώ η σταθερά χρόνου είναι 4.7 μs , όπως και στην άσκηση 6.1). Όπως θα διαπιστώσετε, στις πολύ "χαμηλές" συχνότητες (πολύ χαμηλότερες από τη συχνότητα αποκοπής), η έξοδος είναι πολύ μικρότερη από την είσοδο (μέτρο συνάρτησης μεταφοράς $\ll 1$), αφού οι πυκνωτές συμπεριφέρονται σαν ανοικτό κύκλωμα στις χαμηλές συχνότητες· αντίθετα, στις πολύ "ψηλές" συχνότητες (πολύ ψηλότερες από τη συχνότητα αποκοπής), η έξοδος V_2 είναι σχεδόν ίση με την είσοδο V_1 (συνάρτηση μεταφοράς ≈ 1), αφού οι πυκνωτές συμπεριφέρονται σαν βραχυκύκλωμα στις ψηλές συχνότητες --εξ ου και το όνομα "υψιπερατό φίλτρο".

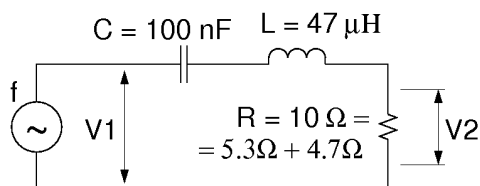
Για τη διευκόλυνση σας, για τον υπολογισμό του μέτρου και της φάσης των συναρτήσεων μεταφοράς (ασκήσεις 7.1 και 7.2), μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή ή να γράψετε ένα μικρό πρόγραμμα στην γλώσσα που προτιμάτε. Ενδεικτικά, για την 7.1, το παρακάτω

προγραμματίζει σε Python κάνει τους υπολογισμούς που χρειάζεστε· στις εκτυπώσεις που φτιάχνει, η τελευταία στήλη δίνει τη διαφορά χρόνου ΔT μεταξύ αντίστοιχων μηδενισμών των δύο ημιτονοειδών σημάτων. Όπως ξέρετε, η Python υποστηρίζει εγγενώς μαγαδικούς αριθμούς, και συνεπώς κάνει πολύ εύκολους τους υπολογισμούς των συναρτήσεων μεταφοράς:

```
from math import pi
from cmath import phase
R=47; C=100e-9; w0=1/(R*C); f0=w0/(2*pi)
f=[1000,2000,4000,8000,16000,25000,50000,65000,125000,250000,500000,1000000,f0]
f.sort()
for fi in f:
    Hi=1j*2*pi*fi*R*C/(1+1j*2*pi*fi*R*C)
    print fi,Hi,abs(Hi),phase(Hi)*180/pi,phase(Hi)/(2*pi*fi)*1e6
```

Άσκηση 7.2 Απόκριση Ζωνοπερατού Φίλτρου LC - Συντονισμός

Θεωρήστε το *συντονιζόμενο* κύκλωμα πηνίου-πυκνωτή, με μία μικρή αντίσταση όπως στην άσκηση 6.1, που φαίνεται δεξιά. Όπως και πριν, η εμπέδηση του πηνίου είναι $Z_L = j\omega L$, η εμπέδηση του πυκνωτή είναι $Z_C = 1/j\omega C = -j/\omega C$, η εμπέδηση της αντίστασης είναι $Z_R = R$, και η συνολική εμπέδηση των τριών στοιχείων εν σειρά είναι το άθροισμα, $R + j(\omega L - 1/\omega C)$. Από τον διαιρέτη τάσης προκύπτει ότι η συνάρτηση μεταφοράς είναι $V_2/V_1 = R / [R + j(\omega L - 1/\omega C)] = 1 / \{1 + j[\omega(L/R) - 1/\omega RC]\}$. Εδώ βλέπουμε ότι το μέτρο του παρονομαστή ελαχιστοποιείται --άρα το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς μεγιστοποιείται-- όταν η εμπέδηση του πυκνωτή, $Z_C = -j/\omega C$, γίνεται ακριβώς αντίθετη της εμπέδησης του πηνίου, $Z_L = j\omega L$, δηλαδή όταν $\omega L = 1/\omega C$, ή αλλιώς $\omega = 1/\sqrt{LC}$, που είναι ακριβώς η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης (συντονισμού) του κυκλώματος L-C που ξέραμε από το εργαστήριο 5.



Υπολογίστε όπως και στην άσκηση 6.1 το μέτρο και τη γωνία της συνάρτησης μεταφοράς για το κύκλωμα του σχήματος ($C = 100 \text{ nF}$, $L = 47 \text{ μH}$, $R = 10 \text{ Ω}$), για κάθε μία από τις εξής συχνότητες πηγής: 6 kHz, 12 kHz, 25 kHz, 35 kHz, 50 kHz, 60 kHz, **73.41 kHz**, 90 kHz, 100 kHz, 140 kHz, 200 kHz, 400 kHz, και 800 kHz. Εδώ, η "κεντρική" συχνότητα, 73.41 kHz, είναι η συχνότητα συντονισμού. Όπως θα διαπιστώσετε, στη συχνότητα συντονισμού η έξοδος V_2 είναι ίση με την είσοδο V_1 (συνάρτηση μεταφοράς = 1), ενώ τόσο "λίγο κάτω" όσο και "λίγο πάνω" από τη συχνότητα συντονισμού η έξοδος είναι πολύ μικρότερη από την είσοδο (μέτρο συνάρτησης μεταφοράς $\ll 1$), αφού είτε ο πυκνωτής (προς τα κάτω) είτε το πηνίο (προς τα πάνω) συμπεριφέρονται σαν ανοικτό κύκλωμα --εξ ου και το όνομα "ζωνοπερατό φίλτρο", αφού αφήνει να περάσουν μόνο μία ζώνη συχνοτήτων. Οι δέκτες ραδιοφώνων, τηλεοράσεων, και γενικά ασύρματων επικοινωνιών χρησιμοποιούν αυτή την αρχή για να "συντονίζονται" στη συχνότητα ενός σταθμού, και να αποκρίνουν τα σήματα από σταθμούς άλλων συχνοτήτων.

Πείραμα 7.3 Υψηλεπατό Φίλτρο RC στο Εργαστήριο

Κατασκευάστε στο εργαστήριο το κύκλωμα της άσκησης 7.1 παραπάνω και μετρήστε τη συνάρτηση μεταφοράς του. Χρησιμοποιήστε την παλμογεννήτρια, σε ημιτονοειδές σήμα, σαν πηγή, το κανάλι 1 του παλμογράφου για να βλέπετε την τάση V_1 , και το κανάλι 2 για να βλέπετε την V_2 . Προσέξτε, όπως και στο πείραμα 6.2, να ρυθμίζετε την τάση της πηγής σας σε σχετικά χαμηλές τιμές ώστε να μην κάψετε την αντίσταση! (Μόνον στις πολύ χαμηλές συχνότητες, όταν η εμπέδηση του πυκνωτή είναι πολύ μεγάλη, εάν η τάση V_2 είναι τόσο μικρή που η μέτρησή της καθίσταται προβληματική, τότε ανεβάστε την τάση πηγής π.χ. στα 10 Volt για να πάρετε ευκρινέστερες μετρήσεις).

Μετρήστε το μέτρο και τη γωνία της συνάρτησης μεταφοράς για κάθε μία από τις συχνότητες της άσκησης 7.1 (και πιθανόν και για περισσότερες). **Απεικονίστε** γραφικά τόσο τους υπολογισμούς σας της άσκησης 7.1 όσο και τις μετρήσεις σας αυτού του πειράματος, κατ' αναλογία όπως και στο πείραμα 6.2. Υπενθυμίζεται ότι είχε δοθεί εκεί χαρτί millimetre με λογαριθμική κλίμακα συχνοτήτων (οριζόντια): [PDF](#). Για το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς χρησιμοποιήστε λογαριθμική κλίμακα και στον κατακόρυφο άξονα· για τη γωνία, προτιμήστε γραμμική κλίμακα, στον κατακόρυφο άξονα. **Συγκρίνετε** τις τιμές των υπολογισμών με τις τιμές των μετρήσεων, και εξηγήστε/σχολιάστε τυχόν αποκλίσεις. Όπως είπαμε στο πείραμα 6.2, η τάση V_2 , στο κανάλι 2 του παλμογράφου, είναι ανάλογη προς το ρεύμα του πυκνωτή. Στις χαμηλές συχνότητες, όταν V_2 πολύ μικρή, η τάση του πυκνωτή,

V1-V2, είναι σχεδόν ίση με την V1, άρα είναι σχεδόν ό,τι βλέπουμε στο κανάλι 1. Υπ' αυτές τις συνθήκες, ελέγξτε ότι όντως το ρεύμα του πυκνωτή, σε κάθε χρονική στιγμή, είναι ανάλογο προς την *παράγωγο* της τάσης του εκείνη τη στιγμή.

Πείραμα 7.4 Ζωνοπερατό, Συντονιζόμενο Φίλτρο LC στο Εργαστήριο

Κατασκευάστε στο εργαστήριο το κύκλωμα της άσκησης [7.2](#) παραπάνω και μετρήστε τη συνάρτηση μεταφοράς του. Στο εργαστήριο θα βάλετε μόνο την αντίσταση 4.7Ω --τα υπόλοιπα είναι η εσωτερική αντίσταση του πηνίου που μετρήσατε στο πείραμα 6.2. Χρησιμοποιήστε την παλμογεννήτρια, σε ημιτονοειδές σήμα, σαν πηγή, το κανάλι 1 του παλμογράφου για να βλέπετε την τάση V1, και το κανάλι 2 για να βλέπετε την V2. Επειδή η V2 είναι η τάση πάνω στα 4.7Ω μόνο από την περίπου διπλάσια ολική αντίσταση μετά την V1, οι τάσεις V2 που θα βλέπετε εδώ θα είναι περίπου οι μισές από αυτές που υπολογίσατε στην άσκηση 7.2. Προσέξτε, όπως και στο πείραμα 7.3, να ρυθμίζετε την τάση της πηγής σας σε σχετικά χαμηλές τιμές ώστε να μην κάψετε την αντίσταση! (Μόνον σε συχνότητες πολύ μακριά από το συντονισμό, όταν η εμπίδση του πυκνωτή ή του πηνίου είναι πολύ μεγάλη, εάν η τάση V2 είναι τόσο μικρή που η μέτρησή της καθίσταται προβληματική, τότε ανεβάστε την τάση πηγής π.χ. στα 10 Volt για να πάρετε ευκρινέστερες μετρήσεις).

Ψάξτε να βρήτε και να μετρήσετε τη συχνότητα συντονισμού: τη συχνότητα εκείνη όπου μεγιστοποιείται το πλάτος της εξόδου V2· τι διαφορά φάσης έχει η V2 από τη V1 στη συχνότητα συντονισμού, και γιατί; **Μετρήστε** το μέτρο και τη γωνία της συνάρτησης μεταφοράς για πολλές συχνότητες γύρω από τη συχνότητα συντονισμού --πιο πυκνά κοντά στη συχνότητα συντονισμού, και κάπως αραιότερα πιο μακριά. **Απεικονίστε** γραφικά τόσο τους υπολογισμούς σας της άσκησης 7.2 όσο και τις μετρήσεις σας αυτού του πειράματος, κατ' αναλογία όπως και στο πείραμα 6.2. **Συγκρίνετε** τις τιμές των υπολογισμών με τις τιμές των μετρήσεων, και εξηγήστε/σχολιάστε τυχόν αποκλίσεις. Παρατηρήστε ότι η συχνότητα συντονισμού πιθανότατα διαφέρει από τα 73.41 kHz της άσκησης 7.2 --γιατί;

[Up to the Home Page of CS-121](#)

© copyright University of Crete, Greece.
last updated: 27 March 2012, by [M. Katevenis](#).