Πανεπιστήμιο Κρήτης

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Αναθεώρηση Πεποιθήσεων σε Βάσεις Γνώσεων

Φλουρής Γεώργιος

Μεταπτυχιακή Εργασία

Ηράκλειο, Σεπτέμβριος 2001

Πανεπιστήμιο Κρήτης
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Αναθεώρηση Πεποιθήσεων Σε Βάσεις Γνώσεων

Εργασία που υποβλήθηκε από τον
Γεώργιο Ε. Φλουρή
ως μερική εκπλήρωση των απαιτήσεων για την απόκτηση
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

Συγγραφέας:

Γεώργιος Ε. Φλουρής
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Εισηγητική Επιτροπή:

Δημήτριος Πλεξουσάκης
Επίκουρος Καθηγητής, Επόπτης

Πάνος Κωνσταντόπουλος
Καθηγητής, Μέλος

Ευάγγελος Μαρκάτος
Αναπληρωτής Καθηγητής, Μέλος

Δεκτή:

Πάνος Κωνσταντόπουλος,
Καθηγητής,
Πρόεδρος Επιτροπής Μεταπτυχιακών Σπουδών

Ηράκλειο, Σεπτέμβριος 2001

Στην οικογένειά μου

Αναθεώρηση Πεποιθήσεων σε Βάσεις Γνώσεων

Γεώργιος Ε. Φλουρής

Μεταπτυχιακή Εργασία
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Περίληψη

Η ανάγκη για ισχυρότερους τρόπους αναπαράστασης πληροφορίας οδήγησε στην ανάπτυξη των λογικών βάσεων γνώσεων, δηλαδή βάσεων στις οποίες η γνώση εκφράζεται με την χρήση λογικών προτάσεων. Τέτοιου είδους βάσεις γνώσης δίνουν την δυνατότητα αποθήκευσης πληροφορίας η οποία δεν είναι ρητώς καταχωρημένη στην βάση (παραγόμενη γνώση). Η παραγόμενη γνώση όμως προκάλεσε δυσκολίες στην ανάπτυξη μεθόδων ενημέρωσης της γνώσης, αφού η νέα πληροφορία μπορεί να αντιφάσκει είτε με την ίδια την βάση ή με την παραγόμενη γνώση της βάσης. Το πρόβλημα της ενημέρωσης μίας βάσης γνώσης με μία νέα, πιθανά αντιφατική, πληροφορία ονομάζεται αναθεώρηση πεποιθήσεων και είναι ένα πολύ σημαντικό πρόβλημα για διάφορες εφαρμογές.

Η παρούσα εργασία αντιμετωπίζει το πρόβλημα αυτό για προτασιακές βάσεις γνώσης. Εισάγεται ένας νέος, ισχυρότερος τρόπος αναπαράστασης εκφράσεων του προτασιακού λογισμού, με την βοήθεια του οποίου μπορούμε να εκφράσουμε την γνώση σαν ένα πίνακα μιγαδικών αριθμών. Η αναπαράσταση αυτή επιτρέπει την "ποσοτικοποίηση" της πληροφορίας και παρέχει έναν άμεσο τρόπο εκτέλεσης των ενημερώσεων καθώς και έναν εύκολο τρόπο αναζήτησης, αξιολόγησης και άρσης των αντιφάσεων της βάσης. Η εκτέλεση των επερωτήσεων υπό την νέα αναπαράσταση είναι ένα παρεμφερές πρόβλημα το οποίο αντιμετωπίζεται, και το οποίο είναι άμεσα συνυφασμένο με το πρόβλημα της αναθεώρησης πεποιθήσεων.

Επιπλέον, προτείνονται τρόποι παραμετροποίησης των μεθόδων ενημέρωσης και επερώτησης και παρατηρείται ότι στην κλάση αλγορίθμων που προκύπτει από την παραπάνω παραμετροποίηση ανήκουν πολύ διαφορετικές τεχνικές ενημέρωσης. Παρόλα αυτά, οι αλγόριθμοι της κλάσης αυτής έχουν πολλές επιθυμητές ιδιότητες και επιτρέπουν την ενοποίηση διαφορετικών πράξεων ενημέρωσης όπως η αναθεώρηση (revision), η διόρθωση (update), η αφαίρεση (contraction) και η διαγραφή (erasure). Αλγόριθμοι της βιβλιογραφίας μπορούν να διατυπωθούν υπό το νέο πλαίσιο εργασίας

για συγκεκριμένες παραμέρους και προβλήματα του κλασικού προτασιακού λογισμού μπορούν να επιλυθούν με όρους της αναπαράστασης πινάκων. Τέλος, μελετώνται κάποια νέα προβλήματα που ανοίγονται από την εισαγωγή της αναπαράστασης πινάκων και προτείνονται τρόποι περαιτέρω βελτίωσης της τεχνικής αυτής στην αναπαράσταση και ενημέρωση γνώσης.

Επόπτης: Δημήτριος Πλεξουσάκης
Επίκουρος Καθηγητής Επιστήμης Υπολογιστών
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Belief Revision in Knowledge Bases

George E. Flouris

Master of Science Thesis
Computer Science Department
University of Crete

Abstract

The need for more powerful knowledge representation techniques led to the development of logical knowledge bases, where knowledge is expressed using logical propositions. Such knowledge bases allow the existence of information not explicitly stored in the base (implicit knowledge). However, implicit knowledge introduced several difficulties when it comes to updating the knowledge, as the new data may contradict either the knowledge base itself, or the implicit knowledge of the base. The problem of updating a knowledge base in the face of new, possibly contradictory, information is known as belief revision and is a crucial problem for several applications.

This work addresses this problem for propositional knowledge bases. A new and more powerful representation of propositional expressions is introduced, which allows the expression of knowledge as a 2-dimensional matrix of complex numbers. This representation allows the "quantification" of knowledge and provides a direct way of executing updates, as well as an easy method for seeking, rating and removing contradictions in the knowledge base. Executing queries under this new representation is a similar problem that is addressed, and which is directly related to the problem of belief revision.

Moreover, ways of parameterization of the updating and querying methods are proposed and it is observed that quite different techniques of updating belong in the class of algorithms occuring from the above parameterization. Despite this fact, algoritms belonging in this class have several desirable properties and allow the integration of different update operations, such as revision, update, contraction and erasure. Proposed algorithms from the literature can be set forth under the new framework for specific parameters and problems of classical propositional logic can be solved under this notion. Finally, some new problems opened by the introduction

of the table representation are discussed and methods of further improvement of this technique in knowledge representation and updating are proposed.

Supervisor: Dimitris Plexousakis
Assistant Professor of Computer Science
University of Crete

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επόπτη της εργασίας μου κ. Δημήτριο Πλεξουσάκη για την πολύτιμη βοήθεια, καθοδήγηση και υποστήριξη που μου παρείχε σε όλη την διάρκεια της παρούσας εργασίας. Η συνεργασία μας υπήρξε εξαιρετική και η εμπιστοσύνη η οποία μου έδειξε ήταν καθοριστική για την ολοκλήρωση της εργασίας μου.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την ομάδα Πληροφοριακών Συστημάτων του Ινστιτούτου Πληροφορικής – Ι.Τ.Ε. για την υλικοτεχνική υποδομή που μου παρείχε τον τελευταίο χρόνο, καθώς και τα μέλη της εισηγητικής επιτροπής κ. Πάνο Κωνσταντόπουλο και κ. Ευάγγελο Μαρκάτο για τις εποικοδομητικές τους παρατηρήσεις.

Οφείλω επίσης ένα θερμό ευχαριστώ στους φίλους μου για την ψυχολογική υποστήριξη που μου παρείχαν σε όλη την διάρκεια της εργασίας. Η ονομαστική αναφορά τους είναι περιττή, καθώς αρκεί που γνωριζόμαστε μεταξύ μας.

Το μεγαλύτερο όμως ευχαριστώ το οφείλω στους γονείς μου, Μανώλη και Μαρία, και στον αδερφό μου, Κώστα, για τους κόπους, τις θυσίες και την εμπιστοσύνη τους, χωρίς την οποία δεν θα ήμουν σε θέση να ολοκληρώσω την εργασία αυτή.

Πίνακας Περιεχομένων

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή 1
1.1 Γνώση και Αναπαράσταση Γνώσης 1
1.2 Τρόποι Αποθήκευσης Γνώσης 1
1.3 Σύντομη Εισαγωγή στην Προτασιακή Λογική 2
1.4 Ιδιότητες των Προτασιακών Βάσεων Γνώσεων 6
1.5 Περιγραφή Προβλήματος 7
1.6 Αντικείμενο της Εργασίας και Τρόπος Προσέγγισης 11
1.7 Οργάνωση της Εργασίας 12
Κεφάλαιο 2: Βιβλιογραφία 14
2.1 Εισαγωγή και Γενική Μεθοδολογία 14
2.2 Αναθεώρηση Πεποιθήσεων στο Σχεσιακό Μοντέλο 14
2.3 Ο Αλγόριθμος του Dalal 17
2.4 Αξιώματα AGM 20
2.5 Επεκτάσεις των Αξιωμάτων AGM 22
2.6 Αναπαράσταση Γνώσης 23
2.7 Πολλαπλές Ενημερώσεις 27
2.8 Απόρριψη και Αποδοχή Πεποιθήσεων 27
2.9 Άλλες Τεχνικές και Σκέψεις 28
Κεφάλαιο 3: Συλλογισμοί και Παραδοχές 30
3.1 Εισαγωγή 30
3.2 Αναπαράσταση Γνώσης – Βασικές Σκέψεις 30
3.3 Βάσεις Πεποιθήσεων και Ενημερώσεις 32
3.4 Δείκτης Αξιοπιστίας 34
3.5 Πολλαπλές Ενημερώσεις 36
3.6 Ενημερώσεις και Επερωτήσεις 37
3.7 Ιδιότητες της Μεθόδου 38
Κεφάλαιο 4: Μετασχηματισμός Πινάκων 40
4.1 Λογική και Μιγαδικοί Αριθμοί 40
4.2 Από τους Μιγαδικούς στους Πίνακες 41
4.3 Βασικοί Ορισμοί 43
4.4 Ερμηνείες 46
4.5 Πράξεις με Πίνακες 53
4.6 Μετασχηματισμός Πινάκων 54
Κεφάλαιο 5: Αναθεώρηση Πεποιθήσεων 57
5.1 Εισαγωγή – Πρώτες Παραδοχές 57

5.2 Αναθεώρηση Πεποιθήσεων Μεταξύ Πινάκων 57
5.3 Παραδείγματα 60
5.4 Επερωτήσεις 61
5.5 Περιγραφή Μετασχηματισμού Επερωτήσεων 62
5.6 Ορισμός Μετασχηματισμού Επερωτήσεων 66
5.7 Παράδειγμα Εφαρμογής Μετασχηματισμού Επερωτήσεων 76
5.8 Παράμετροι του Μετασχηματισμού Επερωτήσεων 78
5.9 Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Επερωτήσεων 80
5.10 Θετική και Αρνητική Γνώση 82
5.11 Αναθεώρηση, Διόρθωση, Αφαίρεση, Διαγραφή 83
Κεφάλαιο 6: Ιδιότητες της Μεθόδου Ενημέρωσης 89
6.1 Εισαγωγή 89
6.2 Αρχή Ανεξαρτησίας Σύνταξης 89
6.3 Άλλες Λειτουργίες των Βάσεων Γνώσεων 90
6.4 Πολυπλοκότητα – Ταχύτητα 92
6.5 Εξομοίωση Αλγορίθμου Dalal 95
6.6 Πίνακες και Προτασιακός Λογισμός 98
Κεφάλαιο 7: Επίλογος 101
7.1 Σύντομη Περίληψη της Μεθόδου 101
7.2 Ανοιχτά Προβλήματα 102
7.3 Συνεισφορά της Εργασίας 104
Παράρτημα Α 105
Α.1 Αποδείξεις Κεφαλαίου 4 105
Α.2 Πράξεις Μεταξύ Πινάκων 110
Α.3 Συναρτήσεις Αξιοπιστίας και Επιλογής Γραμμών 121
Α.4 Αποδείξεις Κεφαλαίου 6 124
Παράρτημα Β 138
Β.1 Εισαγωγή 138
Β.2 Παράδειγμα Ενημέρωσης με Θετική και Αρνητική Γνώση 138
Β.3 Παράδειγμα Παραμετροποίησης του Δείκτη RF 141
Β.4 Ισοδυναμία Βάσεων Γνώσης – Ακολουθίες Ενημερώσεων 145
Β.5 Γενικά Σχόλια 148
Αναφορές 149

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

1.1 Γνώση και Αναπαράσταση Γνώσης

Μία από τις βασικότερες εφαρμογές των υπολογιστικών συστημάτων είναι η αποθήκευση, ανάκτηση, σύνθεση και αξιολόγηση γνώσης και πληροφορίας για τον κόσμο που μας περιβάλλει. Οι τεράστιες αποθηκευτικές ικανότητες των ηλεκτρονικών υπολογιστών σε συνδυασμό με την δυνατότητα για γρήγορη ανάκτηση των αποθηκευμένων πληροφοριών οδήγησαν από πολύ νωρίς στην χρήση των υπολογιστών σαν αποθήκες πληροφορίας.

Χρησιμοποιώντας τις σύγχρονες τεχνολογίες, όπως τα δίκτυα υπολογιστών και το διαδίκτυο, τα κατανεμημένα συστήματα και τις νέες τεχνολογίες αποθήκευσης, οι υπολογιστές έγιναν ακόμη πιο αποδοτικοί στην διαχείρηση μεγάλων ποσοτήτων πληροφορίας. Έτσι, έχουμε την δυνατότητα αποθήκευσης ακριβέστερων αναπαραστάσεων του κόσμου.

Στην προσπάθεια μας για την όλο και ακριβέστερη αναπαράσταση της γνώσης μας όμως, δεν αρκεί μόνο η αποθήκευση όλο και μεγαλύτερου όγκου πληροφορίας. Νέα μοντέλα και τρόποι αποθήκευσης πληροφορίας έχουν αναπτυχθεί, με στόχο την ακριβέστερη αναπαράσταση της πραγματικότητας. Το κάθε μοντέλο έχει διαφορετικές δυνατότητες και χρησιμοποιείται για διαφορετικές εφαρμογές. Βασικά κριτήρια αξιολόγησης του κάθε μοντέλου αναπαράστασης είναι η εκφραστική του δύναμη, δηλαδή το είδος των πληροφοριών που μπορούμε να αποθηκεύσουμε, η ταχύτητα διαχείρησης, ενημέρωσης και συντήρησης της πληροφορίας, καθώς και η δυνατότητα ανάκτησης πληροφορίας που παρέχεται στον χρήστη. Επιπλέον χαρακτηριστικά που θα μπορούσαμε να λάβουμε υπόψιν μας για την αξιολόγηση τέτοιων τεχνικών είναι οι δυνατότητες ενημέρωσης που παρέχονται στον χρήστη, οι δυνατότητες σύνθεσης πληροφορίας για την εξαγωγή συμπερασμάτων ή άλλου είδους επαγόμενης γνώσης, ή ακόμα και ο χώρος που απαιτείται για την αποθήκευση της πληροφορίας.

1.2 Τρόποι Αποθήκευσης Γνώσης

Το πιο γνωστό και πιο συχνά χρησιμοποιούμενο μοντέλο αναπαράστασης πληροφορίας είναι το μοντέλο οντοτήτων-συσχετίσεων (ER model, [5]). Το μοντέλο αυτό παρέχει την δυνατότητα αναπαράστασης της πληροφορίας συσχετίζοντας διαφορετικά τμήματα γνώσης και αναθέτοντας σε κάθε αντικείμενο-οντότητα του

κόσμου ένα πλήθος από γνωρίσματα, οι τιμές των οποίων το χαρακτηρίζουν μονοσήμαντα σε σχέση με τα υπόλοιπα αντικείμενα του κόσμου.

Ένα σύνολο ισχυρότερων εκφραστικά μοντέλων είναι τα σημασιολογικά δίκτυα. Η πληροφορία εδώ αναπαρίσταται υπό την μορφή γενικευμένου γράφου, με βάση κάποιους συγκεκριμένους κανόνες και σχέσεις που καθορίζονται από την κάθε παραλλαγή του γενικότερου αυτού μοντέλου. Παράδειγμα τέτοιου μοντέλου είναι η γλώσσα Telos [26].

Μεγάλη ώθηση στην εκφραστική δύναμη των μοντέλων αναπαράστασης πληροφορίας έδωσε η ιδέα της χρήσης λογικών προτάσεων για την αναπαράσταση της γνώσης. Έτσι, μία πληροφορία, με βάση τα μοντέλα αυτά, δεν είναι τίποτα περισσότερο από μία λογική έκφραση – ή ένα σύνολο από λογικές εκφράσεις – σε κάποιο είδος λογικής (πρωτοβάθμια, προτασιακή ή άλλη). Έτσι, προκύπτουν διάφορες παραλλαγές του παραπάνω μοντέλου ανάλογα με το είδος της λογικής που θα χρησιμοποιηθεί. Κυρίαρχα μοντέλα είναι αυτά που χρησιμοποιούν πρωτοβάθμια ή προτασιακή λογική. Η πρωτοβάθμια λογική παρέχει τεράστια εκφραστική δύναμη, αλλά μεγάλες δυσκολίες στην διαχείρηση, ανάκτηση και ενημέρωση της πληροφορίας. Η προτασιακή λογική παρά τις δυσκολίες που και αυτή εισάγει στην διαχείρηση της πληροφορίας, χαρακτηρίζεται συχνά σαν ένας ιδανικός συνδυασμός εκφραστικής δύναμης και ευκολίας αναζήτησης και ενημέρωσης.

1.3 Σύντομη Εισαγωγή στην Προτασιακή Λογική

Η παρούσα εργασία θα επικεντρωθεί στο μοντέλο των λογικών βάσεων γνώσεων με χρήση προτασιακής λογικής. Η προτασιακή λογική βασίζεται σε μία γλώσσα L, η οποία είναι ένα σύνολο συμβόλων. Η L περιέχει μεταβλητές τις οποίες ονομάζουμε *άτομα* και συνδέσμους που ονομάζουμε πράξεις ή *τελεστές*. Τα άτομα μπορούν να είναι πεπερασμένου ή απείρως αριθμήσιμου πλήθους και οι τελεστές που συνήθως χρησιμοποιούνται είναι αυτοί της σύζευξης ($\wedge$), διάζευξης ($\vee$), άρνησης ($\neg$), συνεπαγωγής ($\rightarrow$) και ισοδυναμίας ($\leftrightarrow$). Επίσης, η L περιέχει δύο σταθερές τιμές, που συμβολίζουμε με T (αληθές) και F (ψευδές) και ονομάζουμε *αληθοτιμές*. Για να εξασφαλιστεί η μονοσήμαντη αναγνωσιμότητα των λογικών εκφράσεων που θα προκύψουν από την L, προσθέτουμε στο σύνολο L και τις παρενθέσεις ((,)). Έτσι μία τυπική γλώσσα L είναι το σύνολο: $L=\{\wedge,\vee,\neg,\leftrightarrow,\rightarrow,T,F,(,),a_1,a_2,a_3,\ldots\}$.

Τα στοιχεία του συνόλου L μπορούν να συνδυαστούν για να σχηματίσουν συμβολοσειρές. Κάθε συμβολοσειρά που σχηματίζεται με συνδυασμό πεπερασμένου πλήθους στοιχείων του συνόλου L λέγεται *έκφραση*. Όμως δεν είναι όλες οι εκφράσεις αποδεκτές. Το σύνολο των αποδεκτών εκφράσεων (ή καλά σχηματισμένων εκφράσεων, όπως λέγονται) συμβολίζεται με L^*. Τις καλά σχηματισμένες εκφράσεις θα τις λέμε και *προτάσεις*. Υπάρχουν ακριβείς κανόνες οι οποίοι καθορίζουν αν μία

έκφραση είναι πρόταση ή όχι (δηλαδή αν ανήκει στο L^*). Έτσι, για παράδειγμα, είναι γνωστό ότι για την γλώσσα $L=\{a_1,a_2,a_3,\wedge,\vee,\neg,\leftrightarrow,\rightarrow,T,F,(,)\}$ η συμβολοσειρά "$(\wedge\neg a_1\vee a_2$" δεν είναι αποδεκτή έκφραση. Οι κανόνες σχηματισμού καλά σχηματισμένων εκφράσεων είναι οι εξής:

1) Κάθε λογική έκφραση της μορφής x όπου x: άτομο ή σταθερά (T, F) της L είναι καλά σχηματισμένη (δηλαδή $x\in L^*$).
2) Αν η λογική έκφραση x είναι καλά σχηματισμένη, τότε και η λογική έκφραση $\neg(x)$ είναι καλά σχηματισμένη (δηλαδή $x\in L^*\Rightarrow\neg(x)\in L^*$).
3) Αν οι λογικές εκφράσεις x,y είναι καλά σχηματισμένες, τότε και οι εκφράσεις $(x)\vee(y)$, $(x)\wedge(y)$, $(x)\rightarrow(y)$, $(x)\leftrightarrow(y)$ είναι καλά σχηματισμένες (δηλαδή $x,y\in L^*\Rightarrow(x)\vee(y)\in L^*$, $x,y\in L^*\Rightarrow(x)\wedge(y)\in L^*$, $x,y\in L^*\Rightarrow(x)\rightarrow(y)\in L^*$, $x,y\in L^*\Rightarrow(x)\leftrightarrow(y)\in L^*$).
4) Όλες οι καλά σχηματισμένες εκφράσεις ακολουθούν τους κανόνες 1, 2, 3.

Σε πολλές περιπτώσεις, οι κανόνες αυτοί δεν τηρούνται κατά γράμμα. Έτσι θα θεωρούμε πολλές φορές και την έκφραση $\neg a_1\vee a_2\in L^*$ σαν καλά σχηματισμένη έκφραση, παρόλο που η σωστή μορφή της είναι η $(\neg(a_1))\vee(a_2)\in L^*$. Πιο συγκεκριμένα, για λόγους αναγνωσιμότητας, θα αποφεύγουμε τις μη απαραίτητες παρενθέσεις, ορίζοντας την προτεραιότητα μετξύ των τελεστών της L ως εξής:

1) Άρνηση: $\neg$
2) Σύζευξη, διάζευξη: $\wedge$, $\vee$
3) Συνεπαγωγή, ισοδυναμία: $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Με δεδομένη την παραπάνω προτεραιότητα, μπορούμε να δημιουργήσουμε πιο αναγνώσιμες εκφράσεις με λιγότερες παρενθέσεις, χωρίς να χάνουμε σε εκφραστικότητα.

Κάθε άτομο (μεταβλητή) της γλώσσας δέχεται δύο μόνο δυνατές τιμές, τις T και F (αληθές και ψευδές αντίστοιχα). Κάθε (αυθαίρετη) ανάθεση αληθοτιμών στα άτομα της L ονομάζεται *ερμηνεία*. Μία έκφραση του συνόλου των προτάσεων L^* δεν είναι από μόνη της αληθής ή ψευδής. Για κάθε δεδομένη ερμηνεία όμως, μπορούμε να βρούμε την αληθοτιμή μίας οποιασδήποτε πρότασης του L^*. Αυτό γίνεται με αναδρομικό τρόπο χρησιμοποιώντας τους παρακάτω κανόνες, οι οποίοι δίνουν το αποτέλεσμα της εφαρμογής κάθε τελεστή:

1) $\neg x=T\Leftrightarrow x=F$
2) $x\wedge y=T\Leftrightarrow x=T$ και $y=T$
3) $x\vee y=T\Leftrightarrow x=T$ ή $y=T$
4) $x\rightarrow y=T\Leftrightarrow x=F$ ή $y=T$
5) $x\leftrightarrow y=T\Leftrightarrow(x=T$ και $y=T)$ ή $(x=F$ και $y=F)$

Με δεδομένους τους κανόνες σχηματισμού των λογικών εκφράσεων της L^*, αποδεικνύεται εύκολα ότι οι παραπάνω 5 κανόνες είναι επαρκείς για την εύρεση της τιμής αληθείας μίας οποιασδήποτε πρότασης. Για λόγους καλύτερης εποπτείας χρησιμοποιούνται επίσης οι παρακάτω *πίνακες αληθείας*, οι οποίοι δίνουν την τιμή της έκφρασης $\neg x$ και των εκφράσεων $x\#y$ για κάθε τελεστή $\#\in\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$ και $x,y\in\{T,F\}$:

x	¬x
T	F
F	T

x	y	x∧y
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

x	y	x∨y
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

x	y	x→y
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

x	y	x↔y
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Με την χρήση των πινάκων αληθείας μπορούμε εύκολα να βρούμε την τιμή {T, F} κάθε έκφρασης $P\in L^*$, για κάθε δεδομένη ερμηνεία I. Αν η τιμή αυτή είναι T, τότε λέμε ότι η ερμηνεία I *ικανοποιεί* την P. Το σύνολο των ερμηνειών που ικανοποιούν μία δεδομένη έκφραση $P\in L^*$, ονομάζεται *μοντέλο* της P και συμβολίζεται με mod(P). Αν μία έκφραση $P\in L^*$ ικανοποιείται από όλες τις δυνατές ερμηνείες ονομάζεται *ταυτολογία*. Για να δείξουμε ότι μία έκφραση P είναι ταυτολογία θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\models P$. Αν η P δεν ικανοποιείται από καμία ερμηνεία, τότε λέγεται *αντινομία* ή *μη ικανοποιήσιμη* πρόταση.

Δύο εκφράσεις $P, Q\in L^*$ λέγονται *ισοδύναμες* (συμβολικά $P\cong Q$ ή $P \models\!\models Q$), αν και μόνο αν mod(P)=mod(Q). Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι $P\cong Q$ αν και μόνο αν η έκφραση $P\leftrightarrow Q$ είναι ταυτολογία. Με την βοήθεια της πρότασης αυτής και των πινάκων αληθείας έχει αποδειχθεί μία πληθώρα από ισοδυναμίες, οι οποίες μας επιτρέπουν να μετατρέπουμε μία έκφραση σε άλλη ισοδύναμή της. Ενδεικτικά αναφέρουμε κάποιες από αυτές, οι οποίες ισχύουν για κάθε $A, B, C\in L^*$:

1) $A\cong A\wedge A$ (αυτοπάθεια σύζευξης)
2) $A\cong A\vee A$ (αυτοπάθεια διάζευξης)
3) $A\cong\neg(\neg A)$ (διπλή άρνηση)

4) $A\wedge(B\wedge C)\cong(A\wedge B)\wedge C$ (προσεταιριστικότητα σύζευξης)
5) $A\vee(B\vee C)\cong(A\vee B)\vee C$ (προσεταιριστικότητα διάζευξης)
6) $A\wedge B\cong B\wedge A$ (μεταθετικότητα σύζευξης)
7) $A\vee B\cong B\vee A$ (μεταθετικότητα διάζευξης)
8) $A\rightarrow B\cong\neg A\vee B$ (μετατροπή συνεπαγωγής)
9) $A\leftrightarrow B\cong(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B)$ (μετατροπή ισοδυναμίας)
10) $A\wedge(B\vee C)\cong(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ (επιμερισμός σύζευξης-διάζευξης)
11) $A\vee(B\wedge C)\cong(A\vee B)\wedge(A\vee C)$ (επιμερισμός διάζευξης-σύζευξης)
12) $A\wedge(A\rightarrow B)\cong A\wedge B$ (modus ponens)

Για περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνώστης παραπέμπεται στα βιβλία [6, 28, 32], όπου υπάρχει μία πιο αναλυτική εισαγωγή στον Προτασιακό Λογισμό.

Επιπλέον, ορισμένες προτάσεις έχουν ως συνέπεια κάποιες άλλες. Αυτό ισχύει αν και μόνο αν υπάρχει σχέση υποσυνόλου μεταξύ των μοντέλων τους. Έτσι θα λέμε ότι η P έπεται την Q (συμβολικά $P\models Q$ ή $Q\nvDash P$) αν και μόνο αν $mod(P)\subseteq mod(Q)$. Ισχύει ότι $P\models Q$ αν και μόνο αν $\models(P\rightarrow Q)$, δηλαδή η P έπεται την Q αν και μόνο αν η έκφραση $P\rightarrow Q$ είναι ταυτολογία. Για άλλους τρόπους απόδειξης σχέσης συνέπειας μεταξύ δύο προτάσεων, μπορούμε να ορίσουμε κάποιους συγκεκριμένους *κανόνες παραγωγής* (*rules of inference*). Οι κανόνες παραγωγής προσφέρουν μία τεχνική εξαγωγής συμπερασμάτων, αλλά για να είναι χρήσιμοι πρέπει ο ορισμός των κανόνων να γίνει με τέτοιο τρόπο ώστε το σύνολο κανόνων να είναι *πλήρες* και *ορθό*. Περισσότερες λεπτομέρειες υπάρχουν στο [28], όπου υπάρχει και ο αυστηρός ορισμός των παραπάνω εννοιών.

Μία πρόταση λέμε ότι βρίσκεται σε *κανονική διαζευκτική μορφή* (*disjunctive normal form – DNF*) αν και μόνο αν είναι της μορφής:

$$P=(P_{11}\wedge P_{12}\wedge\ldots\wedge P_{1k_1})\vee\ldots\vee(P_{n1}\wedge P_{n2}\wedge\ldots\wedge P_{nk_n})$$

όπου τα P_{ij} είναι άτομα ή αρνήσεις ατόμων. Στην τετριμμένη περίπτωση που n=0, η παραπάνω έκφραση γίνεται P=F. Από σύμβαση θα λέμε ότι και αυτή η έκφραση είναι σε DNF. Επίσης, κάθε ένας από τους όρους της παραπάνω διάζευξης, για παράδειγμα η έκφραση $P_{11}\wedge P_{12}\wedge\ldots\wedge P_{1k_1}$, θα ονομάζεται *ελάχιστος όρος*. Έχει αποδειχθεί ότι για κάθε έκφραση $P\in L^*$ του Προτασιακού Λογισμού υπάρχει μία τουλάχιστον έκφραση $Q\in L^*$ σε DNF, η οποία να είναι ισοδύναμή της, δηλαδή $P\cong Q$. Αντίστοιχα ορίζεται η *κανονική συζευκτική μορφή* (*conjunctive normal form – CNF*). Λέμε ότι μία έκφραση είναι σε CNF αν και μόνο αν είναι της μορφής:

$$P=(P_{11}\vee P_{12}\vee\ldots\vee P_{1k_1})\wedge\ldots\wedge(P_{n1}\vee P_{n2}\vee\ldots\vee P_{nk_n})$$

όπου τα P_{ij} είναι όπως παραπάνω.

Η απάντηση στο ερώτημα του αν μία έκφραση $Q \in L^*$ σε CNF είναι ικανοποιήσιμη ή όχι αποτελεί ένα πολυσυζητημένο πρόβλημα, το PSAT. Αν κάθε διάζευξη περιέχει το πολύ k όρους το πρόβλημα λέγεται k-SAT. Το πρόβλημα 2-SAT έχει αποδειχθεί ότι είναι πολυωνυμικής πολυπλοκότητας, ενώ το 3-SAT είναι NP-complete πρόβλημα. Το πρόβλημα αυτό έχει μεγάλη σχέση με την αναθεώρηση πεποιθήσεων, διότι ο έλεγχος ικανοποιησιμότητας της σύζευξης ενός συνόλου εκφράσεων αποτελεί υποπρόβλημα της αναθεώρησης πεποιθήσεων.

1.4 Ιδιότητες των Προτασιακών Βάσεων Γνώσεων

Πάνω στις βασικές αυτές αρχές του Προτασιακού Λογισμού έχει χτιστεί μια ολόκληρη θεωρία της οποίας η ανάπτυξη είναι εκτός των στόχων της εργασίας αυτής. Το σημαντικό στοιχείο εδώ είναι οι δυνατότητες των λογικών εκφράσεων οποιουδήποτε είδους λογικής στην αναπαράσταση δεδομένων (facts) και γνώσης. Είναι γνωστό ότι η λογική, ως τρόπος αναπαράστασης γνώσης, έχει πολύ μεγάλη εκφραστική δύναμη. Η πρωτοβάθμια λογική μπορεί πρακτικά να εκφράσει οποιαδήποτε μορφή γνώσης. Αυτό ισχύει – σε μικρότερο βαθμό όμως – και για την προτασιακή λογική. Στην προτασιακή λογική μπορούμε να εκφράσουμε απλή γνώση (facts, για παράδειγμα: A, $A \wedge B$, $\neg A \vee \neg B$), περιορισμούς ακεραιότητας (integrity constraints, για παράδειγμα: $\neg(A \wedge B)$), ενεργούς κανόνες (triggers, για παράδειγμα: $A \rightarrow B$), σχέσεις συνέπειας ή ισοδυναμίας (για παράδειγμα: $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ κοκ), όπως επίσης και ακολουθίες συλλογισμών προς εξαγωγή συμπερασμάτων (συστήματα αποδείξεων του Προτασιακού Λογισμού). Από την άλλη, υπάρχουν σχέσεις που δεν μπορούν να εκφραστούν με τον Προτασιακό Λογισμό, αλλά χρειάζονται ισχυρότερα εκφραστικά μοντέλα όπως είναι η πρωτοβάθμια λογική. Τέτοιες σχέσεις είναι για παράδειγμα οι σχέσεις στιγμιοτύπου (instance of), τα γνωρίσματα οντοτήτων (entity attributes) και οι σχέσεις υποσυνόλου (IsA). Η μικρότερη εκφραστικότητα των προτασιακών βάσεων γνώσεων αποζημιώνεται από το γεγονός ότι σαν μορφή λογικής ο προτασιακός λογισμός είναι πολύ απλούστερος του πρωτοβάθμιου. Αυτό ισχύει τόσο σε θεωρητικό επίπεδο (θεωρήματα, αποδείξεις, απλότητα έκφρασης), όσο και σε πρακτικό (απλότητα διαχείρισης συμβόλων, πολυπλοκότητα αλγορίθμων).

Σε κάποια από τα γνωστά μοντέλα, για παράδειγμα στο μοντέλο οντοτήτων-συσχετίσεων, κάθε πληροφορία απαιτείται να αποθηκεύεται ρητώς στην βάση. Έτσι, ότι υπάρχει στην βάση γνώσης μας ισχύει (θεωρείται αληθές), ενώ ότι δεν υπάρχει δεν ισχύει (θεωρείται ψευδές). Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να αποθηκεύεται ρητώς κάθε γνωστή πληροφορία, καθώς και οι ενδιαφέρουσες συνέπειες αυτών. Σε άλλα, για παράδειγμα στη γλώσσα Telos, δίνεται η δυνατότητα εξαγωγής συμπερασμάτων (παραγόμενη γνώση).

Στις προτασιακές βάσεις γνώσης (και γενικότερα στις λογικές βάσεις γνώσης) υπάρχει η έννοια της επαγόμενης πληροφορίας. Για παράδειγμα οι εκφράσεις «A» και «A→B» είναι γνωστό ότι μας δίνουν ως συνέπεια την έκφραση «B» (modus ponens). Έτσι, αν με βάση κάποια παρατήρηση ισχύει η λογική πρόταση «A», ενώ με βάση μία άλλη παρατήρηση όποτε ισχύει το A ισχύει και το B («A→B»), τότε ο συνδυασμός των δύο αυτών παρατηρήσεων μας δίνει την έκφραση «B». Αν εκ των υστέρων μία νέα παρατήρηση μας αναιρέσει την γνώση «A», τότε αυτόματα αναιρείται και η γνώση «B», αφού πλέον δεν έχουμε κανένα λόγο να πιστεύουμε το «B».

Η παραπάνω παρατήρηση είναι πολύ σημαντική για δύο λόγους. Πρώτον, διότι δείχνει την συμπάγεια της εκφραστικότητας των προτασιακών βάσεων γνώσεων, αφού μας αρκεί η αποθήκευση μόνο ενός μέρους της γνωστής πληροφορίας και όχι της πλήρους γνώσης μας για τον κόσμο, και δεύτερον, διότι μας δείχνει την έννοια της εξάρτησης προτάσεων από άλλες προτάσεις, ή ισοδυνάμως, της εξάρτησης συγκεκριμένων κομματιών της γνώσης μας από άλλη γνώση.

Η πιο σημαντική ιδιότητα των Προτασιακών βάσεων γνώσεων όμως είναι η δυνατότητα εξαγωγής συμπερασμάτων. Αποτελεί μία πολύ χρήσιμη διαδικασία για πολλές εφαρμογές όπως είναι η εξόρυξη πληροφορίας (data mining), τα συστήματα λήψης αποφάσεων, τα συστήματα μηχανικής μάθησης, στην επεξεργασία επερωτήσεων, στα συστήματα λογισμού και αποδείξεων κα. Σε άλλου τύπου βάσεις πληροφορίας, είναι αναπόφευκτο ένα ενδιάμεσο βήμα μετατροπής της γνώσης σε λογικές εκφράσεις, προκειμένου η πληροφορία να χρησιμοποιηθεί για τις εφαρμογές αυτές. Εξάλλου, η θεωρητική θεμελίωση όλων των μοντέλων αναπαράστασης πληροφορίας βασίζεται με κάποιο τρόπο σε κάποιο είδος λογικής, κάτι το οποίο αποδεικνύει την ισχύ των λογικών βάσεων γνώσεων.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις δείχνουν ότι η αναπαράσταση γνώσης με λογικές προτάσεις παρέχει αδιαμφισβήτητα πλεονεκτήματα στον τομέα της εκφραστικότητας. Η εισαγωγή των λογικών προτάσεων όμως δημιούργησε νέα προβλήματα στον τομέα της αποθήκευσης, ανάκτησης και διαχείρισης γνώσης. Ένα από τα βασικότερα τέτοια προβλήματα ήταν η ενημέρωση και συντήρηση της υπάρχουσας γνώσης, πρόβλημα με το οποίο θα ασχοληθούμε στην παρούσα εργασία.

1.5 Περιγραφή Προβλήματος

Για να είναι χρήσιμο ένα σύστημα αποθήκευσης πληροφορίας, πρέπει ανά πάσα στιγμή να περιέχει την κατά το δυνατόν πληρέστερη, σωστότερη και πιο πρόσφατη πληροφορία για τον κόσμο τον οποίο μοντελοποιεί. Για να γίνει αυτό, πρέπει η αρχική γνώση να αναθεωρείται συνεχώς, με κάθε νέα παρατήρηση που κάνουμε για τον κόσμο. Με άλλα λόγια, πρέπει να οριστεί μία πράξη (την οποία θα συμβολίζουμε με "•"), η οποία εφαρμοζόμενη μεταξύ μίας βάσης γνώσης

(Knowledge Base – KB) και μίας ενημέρωσης (update), θα μας δίνει μία νέα βάση γνώσης (updated KB). Ο ορισμός της πράξης αυτής αποτελεί ένα μόνο από τα κομμάτια του προβλήματος της *αναθεώρησης πληροφορίας* (belief revision). Ο τρόπος αναπαράστασης της γνώσης και της ενημέρωσης αποτελεί ένα υποπρόβλημα άμεσα σχετιζόμενο με το πρώτο. Όπως είπαμε ήδη, στην παρούσα εργασία μας ενδιαφέρουν βάσεις γνώσης και ενημερώσεις εκφρασμένες σαν λογικές εκφράσεις του Προτασιακού Λογισμού. Το αντίστοιχο πρακτικό κομμάτι του προβλήματος είναι η αναπαράσταση της γνώσης σε μορφή κατανοητή από ηλεκτρονικό υπολογιστή, καθώς και η ανάπτυξη ενός κατά το δυνατόν αποδοτικότερου αλγορίθμου ο οποίος θα υλοποιεί την πράξη της ενημέρωσης ("•") όπως αυτή ορίστηκε παραπάνω.

Το πρόβλημα λοιπόν της ενημέρωσης της πληροφορίας (belief revision), συνίσταται στην εύρεση ενός αλγορίθμου μετατροπής της γνωστής πληροφορίας σε νέα, με βάση κάποια νέα παρατήρηση σχετική με τον υπό μοντελοποίηση κόσμο. Η νέα αυτή παρατήρηση (πληροφορία) μπορεί σε πολλές περιπτώσεις να αντιφάσκει με τις τρέχουσες πεποιθήσεις μας για τον κόσμο. Η περίπτωση αυτή είναι η δυσκολότερη, όπως θα δούμε παρακάτω, αλλά ταυτόχρονα και η πιο ενδιαφέρουσα, δεδομένου ότι όταν δεν υπάρχουν αντιφάσεις αρκεί η απλή συγχώνευση της νέας πληροφορίας με την παλιά.

Η περίπτωση αντιφατικής πληροφορίας δεν θα πρέπει να αντιμετωπίζεται σαν σπάνια, ειδική περίπτωση ενημέρωσης. Υπάρχουν πολλοί λόγοι για τους οποίους μπορεί η νέα (ή αντίστοιχα η παλιά) πληροφορία να είναι λανθασμένη, όπως για παράδειγμα ο θόρυβος στα δεδομένα. Ο θόρυβος μπορεί να είναι ακούσιος (λάθος πληκτρολόγηση δεδομένων, εισαγωγή πληροφορίας μέσα από θορυβώδες κανάλι, παρερμηνεία πληροφορίας ή παρατήρησης από τον χρήστη, αναξιόπιστο υλικό ή λογισμικό) ή εκούσιος (κακοπροαίρετοι χρήστες, εσκεμμένη παραπληροφόρηση).

Επίσης, η γνώση μας είναι κατά κανόνα ημιτελής. Νέα δεδομένα ή γνώση μπορούν να αναιρέσουν την τρέχουσα οπτική μας για τον κόσμο. Είναι πιθανό να υπάρχει πληροφορία η οποία να είναι δύσκολο, αδύνατο ή πολύ ακριβό να αποκτηθεί. Κάποιο κομμάτι πληροφορίας μπορεί να αφορά προσωπικά δεδομένα και έτσι να μην είναι διαθέσιμο. Σε μία κατανεμημένη βάση, κάποιος χρήστης μπορεί να βλέπει μόνο ένα κομμάτι της γνωστής πληροφορίας και όχι όλη την βάση.

Τέλος, κανείς δεν μπορεί να μας εγγυηθεί ότι ο κόσμος μας είναι στατικός. Κάτι το οποίο ισχύει σε μία δεδομένη χρονική στιγμή μπορεί να μην ισχύει σε κάποια επόμενη, αφού ενδέχεται ο κόσμος μας να αλλάζει δυναμικά. Τα παραπάνω κάνουν σαφές ότι καμία γνώση δεν μπορεί να θεωρείται αυθεντική και απόλυτα σωστή. Έτσι οφείλουμε να είμαστε προσεκτικοί τόσο κατά την απόρριψη όσο και κατά την αποδοχή ενημερώσεων-παρατηρήσεων. Αυτό αποτελεί και το πρώτο μεγάλο πρόβλημα της ενημέρωσης πληροφορίας.

Όπως μπορεί εύκολα να γίνει αντιληπτό, η αξία του προβλήματος της αναθεώρησης γνώσης είναι πολύ μεγάλη. Οι γνώσεις μας για τον υπό μοντελοποίηση κόσμο δεν είναι όπως είδαμε πλήρεις ούτε σωστές εκ των προτέρων. Ακόμα και αν είναι όμως, πρέπει να είμαστε προετοιμασμένοι για το ενδεχόμενο της αλλαγής του δυναμικού κόσμου που μας περιβάλλει. Άρα λοιπόν η ύπαρξη μίας μεθόδου αναθεωρήσεων είναι απαραίτητη, και μάλιστα η μέθοδος αυτή οφείλει να αναθεωρεί την γνώση με τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Ένας αλγόριθμος αναθεωρήσεων ο οποίος επιλέγει λάθος πληροφορία προς απόρριψη-αποδοχή θα μας οδηγήσει σύντομα στην μοντελοποίηση ενός κόσμου πολύ διαφορετικού από τον πραγματικό, κάτι σίγουρα μη επιθυμητό – και αυτό αποτελεί μόνο το ένα (το πιο εύκολο) σκέλος του προβλήματος. Το δεύτερο σκέλος έχει να κάνει με την σωστή διαισθητικά μετάβαση από την αρχική βάση στην ενημερωμένη. Το βασικό μας κίνητρο κατά την σχεδίαση μίας μεθόδου αναθεώρησης πληροφορίας οφείλει να είναι η ανθρώπινη διαίσθηση. Δεν αρκεί μόνο η σωστή αποδοχή-απόρριψη γνώσης. Σε μερικές περιπτώσεις μπορούμε με μικρές αλλαγές στις πεποιθήσεις μας να αποδεχτούμε μία νέα αντιφατική παρατήρηση. Σε άλλες περιπτώσεις πάλι, είναι απαραίτητη η πλήρης απόρριψη κάποιας ή κάποιων παρατηρήσεων (ή της ενημέρωσης) προκειμένου να καταλήξουμε σε ένα συνεπές σύστημα γνώσης. Όπως θα δούμε, στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί τρόποι ενημέρωσης της γνώσης μας. Η σωστότερη προσέγγιση (θα πρέπει να) υποδεικνύεται από την ανθρώπινη σκέψη.

Στην καθημερινή ζωή, είμαστε υποχρεωμένοι να αλλάζουμε συνεχώς τις πεποιθήσεις μας, προσθέτωντας νέες και αφαιρώντας ή αλλάζοντας παλιές. Νέες γνώσεις για τον κόσμο που μας περιβάλλει καταφθάνουν συνεχώς στον ανθρώπινο εγκέφαλο μέσω των αισθητήριων οργάνων. Όταν – με κάποιο τρόπο – μάθουμε κάτι σχετικό με τον κόσμο γύρω μας, τότε η νέα πληροφορία αποτελεί πλέον μέρος των πεποιθήσεων μας. Στην συνέχεια ξεκινάει μία διαδικασία αποδοχής ή απόρριψης της νέας και των παλιών πεποιθήσεων, η αναθεώρηση πραγμάτων που θεωρούσαμε δεδομένα, η μελέτη των συνεπειών της νέας γνώσης σε συνδυασμό με την παλιά κοκ. Αν η διαδικασία αυτή προκαλέσει την δημιουργία νέας (επαγόμενης) γνώσης, τότε εισάγεται και αυτή ως νέα γνώση, οπότε η όλη διαδικασία επαναλαμβάνεται από την αρχή.

Οι ακριβείς διανοητικές διαδικασίες ενημέρωσης γνώσης δεν είναι απόλυτα γνωστές και αποτελούν ενεργό πεδίο μελέτης για διάφορες επιστήμες όπως ψυχολογία και φιλοσοφία ([13, 17, 18]). Στην πράξη πάντως, οι διαδικασίες αυτές καθαυτές δεν είναι τόσο σημαντικές όσο το αποτέλεσμά τους, δηλαδή το αποτέλεσμα της ενημέρωσης των πεποιθήσεών μας. Η τυποποίηση και μοντελοποίηση της ανθρώπινης σκέψης αποτελεί επομένως ένα ακόμα θέμα το οποίο θα πρέπει να μας απασχολήσει στην παρούσα εργασία.

Ξεφεύγοντας λίγο από την παραπάνω αφηρημένη μελέτη, ας δούμε τι συμβαίνει στις προτασιακές βάσεις γνώσης. Εδώ έχουμε γνώση η οποία εκφράζεται με ένα σύνολο από λογικές εκφράσεις. Οι προτάσεις αυτές εκφράζουν την τρέχουσα γνώση μας για τον κόσμο. Μία νέα πληροφορία αποτελεί μία νέα λογική έκφραση, η οποία μπορεί απλά να προστεθεί στο σύνολο των λογικών εκφράσεων, οπότε και πετυχαίνουμε την επιθυμητή αναθεώρηση.

Τα προβλήματα αρχίζουν όταν αυτή η νέα γνώση αναιρεί κάποια από τις παλιές. Αυτό μπορεί να συμβαίνει άμεσα (δηλαδή να αντιφάσκει άμεσα με μία παλιά παρατήρηση) ή έμμεσα (δηλαδή να αντιφάσκει με μία από τις συνέπειες κάποιας ή κάποιων παλιών παρατηρήσεων). Αν συμβαίνει αυτό, με την απλή εισαγωγή της νέας γνώσης στο σύνολο πεποιθήσεών μας, θα καταλήξουμε σε ένα σύστημα γνώσης αντιφατικό, στο οποίο θα πιστεύουμε ταυτόχρονα δύο αλληλοαναιρούμενες πληροφορίες. Έτσι, αυτό που πρέπει να γίνει κατά την εισαγωγή κάθε νέας πληροφορίας είναι σε πρώτη φάση η αναζήτηση των αντιφάσεων (αν υπάρχουν) και σε δεύτερη η μελέτη των διαφόρων τρόπων άρσης των αντιφάσεων ώστε να επιλεχθεί ο βέλτιστος.

Η εύρεση των αντιφάσεων είναι ένα πρόβλημα του οποίου η θεωρητική λύση είναι όπως θα δούμε σχετικά απλή, αν και οι σχετικοί αλγόριθμοι δεν είναι αποδοτικοί στην πράξη. Το δεύτερο πρόβλημα είναι αρκετά δυσκολότερο θεωρητικά αφού δεν είναι απόλυτα σαφές ακόμα και σήμερα ποιός είναι ο «βέλτιστος» τρόπος άρσης μίας αντίφασης. Όπως θα δούμε, πολλές διαφορετικές μέθοδοι έχουν προταθεί προς αυτή την κατεύθυνση, με διαφορετικά αποτελέσματα.

Για να κατανοήσουμε ένα μέρος των δυσκολιών του προβλήματος, ας δούμε ένα σχετικά απλό παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι η γνώση μας αντιπροσωπεύεται από τις λογικές προτάσεις:

$P_1=A$

$P_2=A\rightarrow B$

Αφού το A ισχύει (P_1) και αφού όποτε ισχύει το A ισχύει και το B (P_2), μία από τις συνέπειες της γνώσης μας είναι και η λογική πρόταση B. Αν μας έρθει μία νέα παρατήρηση (update), σύμφωνα με την οποία ισχύει το $P_3=\neg B$, καταλήγουμε σε αντίφαση. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι με την απλή αναίρεση ενός από τα P_1, P_2, P_3, η βάση μας παύει να είναι αντιφατική. Όμως τι ακριβώς σημαίνει «αναίρεση» στην περίπτωση αυτή; Για παράδειγμα, «αναίρεση» του P_1 θα μπορούσε να σημαίνει αποδοχή του $\neg P_1$ (δηλαδή του $\neg A$), ή διαγραφή του P_1 από την βάση. Και στις δύο αυτές περιπτώσεις η βάση μας παύει να περιέχει αντίφαση. Τι είναι όμως σωστότερο διαισθητικά; Και γιατί να «αναιρέσουμε» το P_1 και όχι το P_2, ή το P_3; Βλέπουμε ότι και στην απλή φανομενικά αυτή περίπτωση, υπάρχουν διαφορετικές επιλογές ως προς τον τρόπο ενημέρωσης, με διαφορετικά αποτελέσματα.

Μία επιπλέον παρατήρηση που έχει σχέση με τις προτασιακές βάσεις γνώσης αφορά την έννοια της ισοδυναμίας λογικών προτάσεων. Δύο ισοδύναμες εκφράσεις στον Προτασιακό Λογισμό θεωρούνται ίδιες ως προς την εκφραστικότητα. Με άλλα λόγια, δύο ισοδύναμες εκφράσεις περιέχουν την ίδια πληροφορία, συνεπώς αναπαριστούν ταυτόσημη γνώση. Αυτό δεν είναι απόλυτα ακριβές. Αν στην παραπάνω περίπτωση είχαμε αντί για τα P_1 και P_2, την πρόταση $Q=A\wedge B$, τότε μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι ο συνδυασμός (σύζευξη) των P_1, P_2 δίνει ακριβώς τις ίδιες συνέπειες με την πρόταση Q, δηλαδή $Q\cong P_1\wedge P_2$. Επομένως θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι δύο βάσεις είναι ταυτόσημες. Εντούτοις, κατά την εισαγωγή της αντιφατικής ενημέρωσης P_3, θα είχαμε διαφορετικές επιλογές ως προς τους τρόπους άρσης της αντίφασης στις δύο περιπτώσεις. Άρα λοιπόν, παρόλο που ισοδύναμες βάσεις περιέχουν την ίδια πληροφορία, δεν μπορούμε να πούμε ότι δύο ισοδύναμες βάσεις είναι και ταυτόσημες, αφού η ενημέρωσή τους με κάποια πρόταση μπορεί να δώσει διαφορετικό αποτέλεσμα.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις αποτελούν μία πρώτη προσέγγιση τόσο της σπουδαιότητας όσο και της δυσκολίας του προβλήματος της αναθεώρησης πεποιθήσεων σε λογικές βάσεις γνώσης. Άλλωστε, η ανάμιξη τόσων διαφορετικών επιστημονικών κλάδων (ψυχολογία, φιλοσοφία, λογική, μαθηματικά, επιστήμη υπολογιστών κα) στην μελέτη του προβλήματος αυτού αποτελεί μία ακόμα ένδειξη της σημασίας του.

1.6 Αντικείμενο της Εργασίας και Τρόπος Προσέγγισης

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη του προβλήματος της ενημέρωσης γνώσης σε Προτασιακές βάσεις γνώσης. Θα αναπτύξουμε μία τεχνική η οποία δίνει απάντηση ως προς το ποιά είναι η «σωστότερη» ενημερωμένη βάση δεδομένης μίας αρχικής βάσης και μίας ενημέρωσης. Η τεχνική αυτή είναι άμεσα υλοποιήσιμη σε οποιοδήποτε υπολογιστικό σύστημα και δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα ως προς την διαισθητική ορθότητα των αποτελεσμάτων και την πολυπλοκότητα και αποδοτικότητα των χρησιμοποιούμενων αλγορίθμων. Μία σύντομη εισαγωγή στην τεχνική αυτή υπάρχει στις εργασίες [15, 16].

Στην προσέγγισή μας θα χρησιμοποιήσουμε μία διαφορετική αναπαράσταση των λογικών εκφράσεων, μία αναπαράσταση με πίνακες μιγαδικών αριθμών η οποία προσφέρει την δυνατότητα να εργαστούμε με λογικές εκφράσεις χρησιμοποιώντας αριθμητικές μεταβλητές και μεθόδους, ξεφεύγοντας από το επίπεδο των συμβόλων. Η αξία της παραπάνω ιδιότητας θα γίνει κατανοητή κατά την ανάπτυξη των τεχνικών ενημέρωσης σε επόμενα κεφάλαια. Θα παρουσιάσουμε έναν αλγόριθμο ενημέρωσης γνώσης ο οποίος στην ουσία θα αποτελεί μία πράξη μεταξύ πινάκων. Ο αλγόριθμος αυτός θα συνδεθεί με την Προτασιακή Λογική με την βοήθεια της αναπαράστασης με πίνακες, αλλά όπως θα δούμε η σύνδεση αυτή έχει ισχυρότατες δυνατότητες

παραμετροποίησης. Κατ' αυτόν τον τρόπο θα έχουμε ορίσει στην πράξη μία ολόκληρη οικογένεια αλγορίθμων, αφού θα μπορούμε να αντιστοιχήσουμε το αποτέλεσμα μίας αναθεώρησης με διαφορετικές λογικές προτάσεις, ανάλογα με τις παραπάνω παραμέτρους. Θα δείξουμε την διαισθητική ορθότητα και τις δυνατότητες της τεχνικής μας, καθώς και την ευελιξία που παρέχει στο χρήστη ως προς το είδος των ενημερώσεων που μπορεί να κάνει. Τέλος, θα μελετήσουμε την σχέση της τεχνικής με αλγορίθμους που έχουν προταθεί στην βιβλιογραφία.

Η αναπαράσταση των λογικών εκφράσεων με πίνακες αναπτύχθηκε με στόχο την διαισθητικά σωστότερη ενημέρωση βάσεων γνώσεων, αλλά όπως θα δούμε οι χρήσεις και εφαρμογές της δεν περιορίζονται μόνο στην ενημέρωση γνώσης. Φιλοδοξούμε ότι η διαφορετική οπτική την οποία παρέχει η συγκεκριμένη αναπαράσταση θα δώσει τροφή για νέες ιδέες στον τομέα της αναπαράστασης γνώσης, τόσο στο επίπεδο των ενημερώσεων (το οποίο και μελετήσαμε), όσο και σε άλλα πεδία, όπως οι επερωτήσεις, η αποτελεσματική αποθήκευση και ανάκτηση δεδομένων, η ακριβής αναπαράσταση πληροφορίας και άλλα. Επίσης, ενδέχεται να προσφέρει λύσεις σε προβλήματα της κλασικής λογικής ή των εφαρμογών της.

1.7 Οργάνωση της Εργασίας

Στο υπόλοιπο της εργασίας θα παρουσιάσουμε αναλυτικότερα την προσέγγιση και τις τεχνικές που περιγράφονται παραπάνω, καθώς επίσης και την βιβλιογραφία και τις τυχόν μελλοντικές επεκτάσεις του αλγορίθμου μας. Πιο συγκεκριμένα, το υπόλοιπο της εργασίας έχει οργανωθεί ως εξής:

- Στο δεύτερο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μία μελέτη της βιβλιογραφίας πάνω στο πρόβλημα της αναθεώρησης πεποιθήσεων. Θα περιγράψουμε τις βασικότερες μεθόδους που έχουν προταθεί και θα μελετήσουμε κάποια από τα χαρακτηριστικά τους.
- Στο τρίτο κεφάλαιο θα δούμε την συλλογιστική η οποία μας οδήγησε στην αποδοχή ή απόρριψη κάποιων χαρακτηριστικών των διαφόρων μεθόδων του κεφαλαίου 2. Θα περιγράψουμε και θα αιτιολογήσουμε τις επιθυμητές ιδιότητες μίας μεθόδου ενημέρωσης καθώς και τις βασικές παραδοχές του μοντέλου μας.
- Στο τέταρτο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε και θα θεμελιώσουμε θεωρητικά την αναπαράσταση των λογικών εκφράσεων με πίνακες.
- Στο πέμπτο κεφάλαιο θα περιγράψουμε την χρήση των πινάκων στην ενημέρωση βάσεων γνώσεων. Επίσης, θα περιγράψουμε μία μέθοδο επερωτήσεων για πίνακες και θα μελετήσουμε κάποιες πρώτες ιδιότητες της μεθόδου, καθώς και κάποιες επεκτάσεις της.
- Στο έκτο κεφάλαιο θα μελετήσουμε κάποια σημαντικά ζητήματα που αφορούν το προτεινόμενο μοντέλο αναθεωρήσεων και τον μετασχηματισμό πινάκων, καθώς και

κάποιες επιπλέον ιδιότητές τους. Επίσης, θα μελετήσουμε την σχέση της μεθόδου με άλλες τεχνικές της βιβλιογραφίας.

- Τέλος, στο έβδομο κεφάλαιο θα κάνουμε μία σύντομη ανασκόπηση στις μεθόδους των προηγούμενων κεφαλαίων, και θα αναλύσουμε τα βασικότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από την μελέτη μας. Επίσης, θα παρουσιάσουμε κάποιες μελλοντικές επεκτάσεις της εργασίας και θέματα που πρέπει να μελετηθούν.

Επίσης, θα υπάρξουν δύο παραρτήματα. Στο παράρτημα Α υπάρχουν κάποιες αποδείξεις για τις προτάσεις που εμφανίζονται στο κυρίως κομμάτι της αναφοράς, καθώς και κάποια παραδείγματα παραμετροποίησης της μεθόδου, ενώ στο παράρτημα Β παρουσιάζονται κάποια παραδείγματα εφαρμογής της τεχνικής μας υπό συγκεκριμένες παραμέτρους.

Κεφάλαιο 2: Βιβλιογραφία

2.1 Εισαγωγή και Γενική Μεθοδολογία

Στο προηγούμενο κεφάλαιο περιγράψαμε το πρόβλημα της αναθεώρησης γνώσης, καθώς και κάποιες από τις βασικότερες δυσκολίες που αυτό εισάγει. Στο παρόν κεφάλαιο θα δούμε πώς αντιμετωπίζονται στην βιβλιογραφία οι δυσκολίες αυτές και τι αποτελέσματα έχουν οι υπάρχουσες προσεγγίσεις.

Γενικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι περισσότερες εργασίες ακολουθούν κοινή συλλογιστική ως προς την αντιμετώπιση του προβλήματος. Αρχικά, ορίζεται ένας «ιδανικός» τρόπος ενημέρωσης. Αυτός ο τρόπος ενημέρωσης είναι συνήθως η σύζευξη της λογικής πρότασης που παριστάνει την βάση με την αντίστοιχη λογική πρόταση της ενημέρωσης. Στην συνέχεια, η παραπάνω «ιδανική» μέθοδος εφαρμόζεται στην περίπτωση αντιφατικής ενημέρωσης. Συνήθως διαπιστώνεται ότι στην γενική περίπτωση η μέθοδος αυτή μπορεί να δώσει μη αποδεκτά αποτελέσματα, δηλαδή ένα μη συνεπές σύστημα γνώσης. Το επόμενο βήμα είναι κατά κανόνα ο ορισμός κάποιου είδους απόστασης (μετρικής) μεταξύ βάσεων γνώσεων. Με την βοήθεια της μετρικής αυτής, αναζητείται μία συνεπής βάση γνώσης με την ιδιότητα να βρίσκεται «πλησιέστερα» (με βάση την παραπάνω μετρική) προς την ασυνεπή βάση που προέκυψε από την εφαρμογή της ιδανικής μεθόδου. Η βάση αυτή είναι και το αποτέλεσμα της ενημέρωσης. Το γενικό αυτό σχήμα επιδέχεται ασφαλώς πολλές παραλλαγές και βελτιώσεις, τις οποίες θα αναλύσουμε στην συνέχεια.

2.2 Αναθεώρηση Πεποιθήσεων στο Σχεσιακό Μοντέλο

Στην δημοσίευση [22] γίνεται μία προσπάθεια μελέτης της αναθεώρησης πεποιθήσεων στο σχεσιακό μοντέλο. Εκεί, οι συγγραφείς μελετούν την περίπτωση μη πλήρους πληροφορίας (Incomplete Information) και παρατηρούν ότι το κλασικό σχεσιακό μοντέλο δεν επαρκεί για την αποθήκευση και αναθεώρηση της γνώσης στις κλασικές βάσεις δεδομένων, όταν η γνώση αυτή είναι ελλιπής. Έτσι προτείνουν μία επέκταση του σχεσιακού μοντέλου (Extended Relational Model), καθώς και τον τρόπο αναθεώρησης της γνώσης σε ένα τέτοιο μοντέλο.

Ο ακριβής τρόπος επέκτασης του σχεσιακού μοντέλου και η σχετική μέθοδος αναθεώρησης δεν έχει και πολύ σχέση με την παρούσα μελέτη, όμως η συλλογιστική και οι παρατηρήσεις των συγγραφέων έχουν πολύ ενδιαφέρον. Έτσι, παρόλο που η συγκεκριμένη δημοσίευση αναφέρεται αποκλειστικά σε βάσεις δεδομένων του

σχεσιακού και επεκταμένου σχεσιακού μοντέλου, περιέχει πολλές ιδέες οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν αυτούσιες σε λογικές βάσεις γνώσης. Αυτό άλλωστε είναι εμφανές από το γεγονός ότι οι ίδιοι οι συγγραφείς χρησιμοποιούν πολλές φορές λογικές εκφράσεις για να τεκμηριώσουν τα αποτελέσματά τους.

Μία από τις βασικότερες παρατηρήσεις τους είναι η διάκριση μεταξύ δύο τύπων ενημερώσεων, τις «ενημερώσεις καταγραφής αλλαγής» (change-recording updates) και τις «ενημερώσεις προσθήκης γνώσης» (knowledge-adding updates). Η διάκριση αυτή είναι πολύ σημαντική, όπως φαίνεται και στην εργασία [21] όπου γίνεται με άψογο φορμαλισμό η αντίστοιχη διάκριση για τις λογικές βάσεις γνώσης (update και revision αντίστοιχα). Έτσι, οι «ενημερώσεις καταγραφής αλλαγής», τις οποίες θα ονομάζουμε στο εξής *διορθώσεις* (updates) αναφέρονται στην αλλαγή των πεποιθήσεών μας όταν ο κόσμος μας αλλάζει δυναμικά. Όταν η αλλαγή οφείλεται στην διαπίστωση ότι κάτι από αυτά που πιστεύαμε ήταν λάθος ή ελλιπές, τότε έχουμε να κάνουμε με «ενημέρωση προσθήκης γνώσης». Αυτόν τον τύπο ενημέρωσης θα τον ονομάζουμε στο εξής *αναθεώρηση* (revision). Με άλλα λόγια, μία διόρθωση οφείλεται στην παρατήρηση ότι ο υπό μοντελοποίηση κόσμος άλλαξε, ενώ μία αναθεώρηση οφείλεται στην παρατήρηση ότι ο υπό μοντελοποίηση κόσμος δεν αναπαρίσταται σωστά από την βάση γνώσης μας. Όπως θα δούμε, τα δύο είδη ενημερώσεων είναι ποιοτικά διαφορετικά και πρέπει να δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα. Επίσης, θα χρησιμοποιούμε τον όρο *ενημέρωση* για να υποδηλώσουμε οποιοδήποτε τύπο ενημέρωσης, είτε πρόκειται για διόρθωση είτε για αναθεώρηση.

Στην ίδια δημοσίευση ([22]) μελετάται και μία πράξη, δυϊκή της ενημέρωσης, η οποία χρησιμοποιείται για την αφαίρεση πληροφορίας από την βάση όταν πλέον δεν έχουμε λόγους να πιστεύουμε σε κάτι. Αντίστοιχα με την πράξη της ενημέρωσης προτείνονται δύο τρόποι αφαίρεσης πληροφορίας από την βάση, οι οποίοι, με βάση την ορολογία της εργασίας [21] (που αναφέρεται σε λογικές βάσεις γνώσης), είναι η *διαγραφή* (erasure), δυϊκή της διόρθωσης, και η *αφαίρεση* (contraction), δυϊκή της αναθεώρησης.

Στην δημοσίευση [36] γίνεται από την Winslett μία ακόμα επέκταση του σχεσιακού μοντέλου με στόχο την σωστή αναπαράσταση της ελλιπούς πληροφορίας. Γίνεται εκτεταμένη χρήση της πρωτοβάθμιας λογικής και προτείνεται ένα συγκεκριμένο θεωρητικό μοντέλο και ο αντίστοιχος αλγόριθμος που υλοποιεί τις ενημερώσεις σε βάσεις με ελλιπή γνώση. Αν περιορίσουμε τον αλγόριθμο αυτό ([36]) στην προτασιακή λογική (η οποία μας ενδιαφέρει στην παρούσα μελέτη) βλέπουμε ότι στην ουσία ο αλγόριθμος επιλέγει από τις ερμηνείες του μοντέλου της ενημέρωσης (μ) αυτές που συμφωνούν με τις ερμηνείες του μοντέλου της βάσης γνώσης (ψ) σε όλα τα άτομα που δεν εμφανίζονται στην έκφραση της μ. Με την επιλογή αυτή προκύπτει ένα σύνολο ερμηνειών το οποίο είναι το μοντέλο της νέας, ενημερωμένης βάσης γνώσης.

Στην δημοσίευση [14] περιγράφεται μία ακόμα προσέγγιση στο πρόβλημα της αναθεώρησης πεποιθήσεων στις σχεσιακές βάσεις γνώσης. Λόγω του γεγονότος ότι στις σχεσιακές βάσεις γνώσης δεν υπάρχει η πράξη της παραγωγής, κάποιος θα μπορούσε να υποθέσει ότι η περίπτωση αντιφατικής ενημέρωσης θα μπορούσε να λυθεί με απλή διαγραφή της υπάρχουσας (αντιφατικής) πλειάδας και αντικατάστασή της με την ενημέρωση. Οι Fagin, Ullman και Vardi παρατηρούν ότι αυτό δεν είναι σωστό διαισθητικά σε ορισμένες περιπτώσεις ([14]).

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα πίνακα με σχήμα: <ΠΡΟΜΗΘΕΥΤΗΣ, ΥΛΙΚΟ, ΕΡΓΟ>. Ο πίνακας αυτός αντιπροσωπεύει μία τριαδική σχέση μεταξύ προμηθευτών, υλικών και έργων και αναπαριστά την πληροφορία ότι κάποιος προμηθευτής παρέχει κάποιο υλικό προς χρήση σε κάποιο έργο. Έστω η πλειάδα <Α, Β, Γ> του πίνακα αυτού, ή αλλιώς η πληροφορία: «ο Α παρέχει το υλικό Β στο έργο Γ» και έστω η ενημέρωση: «ο Α δεν παρέχει το υλικό Β στο έργο Γ». Μία πρώτη αντιμετώπιση της ενημέρωσης θα ήταν η διαγραφή της πλειάδας <Α, Β, Γ>. Εντούτοις η σωστότερη διαισθητικά προσέγγιση είναι η αντικατάσταση της πλειάδας <Α, Β, Γ> με τις πλειάδες: <Α, Β, Null>, <Α, Null, Γ> και <Null, Β, Γ>, αφού κανείς δεν απέκλεισε την περίπτωση ο Α να παρέχει το υλικό Β για άλλο έργο, ή την περίπτωση ο Α να παρέχει κάποιο άλλο υλικό στο έργο Γ ή το Β να χρησιμοποιείται στο έργο Γ, αλλά να παρέχεται από άλλο προμηθευτή. Με άλλα λόγια, δεν απορρίπτουμε εξ ολοκλήρου την πληροφορία της πλειάδας <Α, Β, Γ>, αλλά κρατάμε ένα μέρος της πληροφορίας που αυτή περιέχει με τρόπο ώστε να μην δημιουργούνται αντιφάσεις με την ενημέρωση.

Για να αντιμετωπιστεί το παραπάνω πρόβλημα, οι συγγραφείς χρησιμοποιούν την πρωτοβάθμια λογική και αναπτύσσουν μία ενδιαφέρουσα μέθοδο αναθεώρησης βασισμένοι στην αναπαράσταση του σχεσιακού μοντέλου με πρωτοβάθμιες λογικές εκφράσεις. Δυστυχώς, η μέθοδός τους – όπως αποδεικνύεται στην ίδια δημοσίευση – καταλήγει στην πλήρη απόρριψη της υπάρχουσας γνώσης κάθε φορά που μία αντιφατική πληροφορία φτάνει στο σύστημα. Αυτό έχει χαρακτηριστεί σαν μία υπερβολική σπατάλη γνώσης, γι' αυτό και η μέθοδος αυτή σπάνια χρησιμοποιείται.

Πάντως και εδώ υπάρχουν ενδιαφέρουσες ιδέες, όπως η έννοια της *ελάχιστης αλλαγής* (minimal change) που αναφέρεται στην μετατροπή μίας ασυνεπούς βάσης δεδομένων στην «πλησιέστερη» συνεπή και η έννοια της *ισχύος πεποίθησης* η οποία σχετίζεται με την αξιοπιστία μίας πεποίθησης και την ευκολία ή δυσκολία με την οποία μπορούμε να την απορρίψουμε από την βάση μας.

Ο Weber, στην εργασία [33], πρότεινε μία μέθοδο αναθεώρησης προσανατολισμένη στον προτασιακό λογισμό. Η μέθοδος αυτή εξετάζει τις αληθοτιμές των ατόμων στις ερμηνείες που ικανοποιούν την βάση και την ενημέρωση και βρίσκει σύνολα ατόμων στα οποία υπάρχουν αντιφάσεις. Στην συνέχεια αφαιρεί την γνώση που σχετίζεται με τα συγκεκριμένα άτομα από την βάση και στην συνέχεια

εκτελεί την σύζευξη των υπολοίπων ατόμων με την ενημέρωση. Το αποτέλεσμα είναι πάντα μία συνεπής βάση γνώσης. Η τεχνική αυτή είναι αρκετά «σπάταλη» ως προς την απορριφθείσα γνώση. Παρόλα αυτά, η συλλογιστική του Weber έχει αρκετό ενδιαφέρον, καθώς και οι προτάσεις τις οποίες αποδεικνύει στην [33]. Τέλος, εισάγονται και ορίζονται πολλές ενδιαφέρουσες έννοιες, όπως τα «σύνολα αντίφασης», τα «σύνολα συμφωνίας» κα.

2.3 Ο Αλγόριθμος του Dalal

Ο Dalal ([8, 9]) αντιμετώπισε το πρόβλημα σε προτασιακές βάσεις γνώσης και πρότεινε έναν πολύ ενδιαφέροντα αλγόριθμο ενημέρωσης προτασιακών βάσεων γνώσεων. Αρχικά διατύπωσε 6 αρχές (principles) τις οποίες θα πρέπει κατά την γνώμη του να ικανοποιεί κάθε αλγόριθμος ενημέρωσης. Οι αρχές αυτές διατυπώθηκαν με μη τυπικό τρόπο και είναι οι εξής:

1) *Αρχή Επάρκειας Αναπαράστασης* (*Principle of Adequacy of Representation*): η ενημερωμένη γνώση πρέπει να αναπαρίσταται με τον ίδιο τρόπο όπως και η παλιά. Δηλαδή η μέθοδος αναπαράστασης της γνώσης πρέπει να είναι τέτοια ώστε η ενημερωμένη βάση να αποτελεί πάντοτε «γνώση».
2) *Αρχή Ανεξαρτησίας Σύνταξης* (*Principle of Irrelevance of Syntax*): η θεωρία μετά την ενημέρωση δεν πρέπει να εξαρτάται από την συντακτική διατύπωση της βάσης ή της ενημέρωσης. Με άλλα λόγια, ισοδύναμες ενημερώσεις πάνω σε ισοδύναμες βάσεις πρέπει να δίνουν ισοδύναμα αποτελέσματα, όπου η ισοδυναμία εδώ αναφέρεται σε λογική ισοδυναμία μεταξύ λογικών εκφράσεων.
3) *Αρχή Διατήρησης Συνέπειας* (*Principle of Maintenance of Consistency*): αν η βάση και η ενημέρωση είναι συνεπείς, τότε και το αποτέλεσμα της ενημέρωσης οφείλει να είναι μία συνεπής βάση γνώσης. Με την βοήθεια της αρχής αυτής είμαστε βέβαιοι ότι μία συνεπής ενημέρωση δεν θα προκαλέσει ποτέ ασυνέπειες, εκτός αν η βάση είναι εξαρχής ασυνεπής.
4) *Αρχή Προτεραιότητας Ενημέρωσης* (*Principle of Primacy of Update*): η ενημέρωση περιγράφει την τελευταία γνώση πάνω στον υπό μοντελοποίηση κόσμο και επομένως είναι πάντα σωστή και αξιόπιστη. Έτσι η ενημερωμένη βάση πρέπει να έχει ως συνέπειά της την ενημέρωση.
5) *Αρχή Διατήρησης Παλιάς Πληροφορίας* (*Principle of Persistence of Prior* Knowledge): όσο το δυνατόν περισσότερη από την παλιά γνώση πρέπει να διατηρηθεί μετά την ενημέρωση. Η γνώση είναι πολλές φορές δύσκολο ή ακριβό να αποκτηθεί και δεν πρέπει να χάνεται. Στις περιπτώσεις που κάποια απώλεια γνώσης είναι απαραίτητη (στις αντιφατικές ενημερώσεις για παράδειγμα), πρέπει να φροντίζουμε ώστε η απώλεια γνώσης να περιορίζεται στο ελάχιστο δυνατό.
6) *Αρχή Αμεροληψίας* (*Principle of Fairness*): αν υπάρχουν περισσότερες από μία βάσεις γνώσης οι οποίες μπορούν να προκύψουν από μία ενημέρωση και οι οποίες

ικανοποιούν τις παραπάνω αρχές, τότε δεν πρέπει να επιλέγεται αυθαίρετα κάποια (ή κάποιες) από αυτές. Η επιλεγμένη βάση πρέπει να εξαρτάται από όλες τις πιθανές, και ένας πιθανός ορισμός της είναι η διάζευξη των υποψηφίων αποτελεσμάτων.

Οι παραπάνω αρχές ονομάζονται και *αρχές ενημέρωσης του Dalal* και αναφέρονται στην αναθεώρηση γνώσης. Το βασικό κίνητρο πίσω από τον ορισμό των αρχών είναι η ελαχιστοποίηση της απώλειας πληροφορίας από την βάση γνώσης κατά την ενημέρωση. Το κίνητρο αυτό γίνεται πολύ σαφές μέσω της αρχής 5. Η νέα πληροφορία θεωρείται από τον Dalal πιο αξιόπιστη από την παλιά (αρχή 4), ενώ μία συνέπεια των αρχών 4 και 5 είναι ότι απώλεια πληροφορίας θα έχουμε μόνο σε αντιφατικές ενημερώσεις. Επίσης, μία συνεπής ενημέρωση δίνει πάντα συνεπή αποτελέσματα (αρχή 3). Η αρχή 6 εξασφαλίζει το μονοσήμαντο του αποτελέσματος ενώ η 1 την προφανή απαίτηση η αναπαράσταση της γνώσης να είναι τέτοια που να μπορεί να εκφράσει οποιοδήποτε αποτέλεσμα ενημερώσης. Τέλος, η αρχή 2 επιβάλλει ισοδύναμες αναθεωρήσεις να δίνουν ισοδύναμα αποτελέσματα.

Οδηγούμενος από τις παραπάνω αρχές, ο Dalal πρότεινε έναν αλγόριθμο ο οποίος βασίζεται στις ερμηνείες των λογικών προτάσεων (στον προτασιακό λογισμό). Θεωρεί ότι ο κόσμος χαρακτηρίζεται απόλυτα από την ανάθεση αληθοτιμών στα άτομα που απαρτίζουν την γλώσσα L. Έτσι, υποθέτει ότι η γνώση αποτελείται από μία λογική πρόταση ψ, οπότε ισοδύναμα το σύνολο των ερμηνειών που ικανοποιούν την ψ (δηλαδή το $mod(\psi)$), αντιπροσωπεύει τις πιθανές καταστάσεις του κόσμου που μοντελοποιούμε. Οι ίδιες παρατηρήσεις ισχύουν και για την ενημέρωση μ. Άρα η ενημερωμένη βάση πρέπει, σύμφωνα με τις αρχές του, να αντιπροσωπεύει τις κοινές πιθανές καταστάσεις (ερμηνείες) του ψ και του μ (αν υπάρχουν). Με άλλα λόγια, το μοντέλο της ενημερωμένης βάσης, $\psi \bullet \mu$, οφείλει να είναι η τομή των δύο συνόλων $mod(\psi)$ και $mod(\mu)$, δηλαδή: $mod(\psi \bullet \mu)=mod(\psi) \cap mod(\mu)$. Ισοδύναμα, αυτό σημαίνει ότι πρέπει $\psi \bullet \mu=\psi \wedge \mu$.

Άμεσα παρατηρεί κανείς ότι μπορεί να ισχύει $mod(\psi) \cap mod(\mu)=\varnothing$, ή ισοδύναμα η λογική έκφραση $\psi \wedge \mu$ μπορεί να είναι μη ικανοποιήσιμη, οπότε η ενημέρωση είναι αντιφατική. Στην περίπτωση αντιφατικών ενημερώσεων ο παραπάνω τύπος θα μας δώσει μία μη ικανοποιήσιμη έκφραση. Μία μη ικανοποιήσιμη έκφραση στον προτασιακό λογισμό έχει σαν συνέπειά της οποιαδήποτε πρόταση του L^*, κάτι προφανώς μη επιθυμητό για μία βάση γνώσης. Έτσι, αν οι αντιφατικές ενημερώσεις γίνουν με τον παραπάνω τύπο, θα καταλήξουμε σε ασυνεπείς βάσεις γνώσης, επομένως πρέπει να αντιμετωπιστούν διαφορετικά.

Είδαμε ότι στις αντιφατικές ενημερώσεις δεν υπάρχουν κοινοί πιθανοί κόσμοι μεταξύ της βάσης ψ και της ενημέρωσης μ. Συνεπώς, θα πρέπει να επιλέξουμε ένα άλλο σύνολο πιθανών κόσμων (ή ερμηνειών) σαν την νέα μας γνώση. Λόγω της

αρχής προτεραιότητας ενημέρωσης πρέπει να επιλεγούν κάποιοι από τους κόσμους που αναπαριστά η μ, και λόγω της αρχής διατήρησης παλιάς πληροφορίας πρέπει οι κόσμοι που θα επιλεγούν να είναι κατά το δυνατόν «πλησιέστερα» προς τους κόσμους που αναπαριστά η ψ. Η απόσταση μεταξύ δύο κόσμων (ερμηνειών) στον αλγόριθμο του Dalal καθορίζεται από το πλήθος των ατόμων των οποίων οι αληθοτιμές διαφέρουν.

Πιο τυπικά, ο Dalal ορίζει έναν μετασχηματισμό ερμηνειών (ή πιθανών κόσμων) G, ως εξής:

$G(I_0)$={I|οι κόσμοι (ερμηνείες) I και I_0 διαφέρουν στην αληθοτιμή ενός το πολύ ατόμου}.

Ο μετασχηματισμός επεκτείνεται για σύνολα ερμηνειών ως εξής:

$$G(a) = \bigcup_{I \in a} G(I).$$

Με την ίδια λογική επεκτείνεται και για λογικές εκφράσεις:

$G(\psi)=\psi'$, όπου $mod(\psi')=G(mod(\psi))$.

Επαναληπτική χρήση του μετασχηματισμού επιτρέπεται, με βάση τον επαγωγικό τύπο:

$G^k(\psi)=G(G^{k-1}(\psi))$, $k>0$, και από σύμβαση $G^0(\psi)=\psi$.

Κατά τον Dalal, οι κόσμοι του $G(\psi)$ είναι οι πλησιέστεροι δυνατοί προς τον ψ. Γενικά οι κόσμοι του $G^k(mod(\psi))$ είναι αυτοί που βρίσκονται σε «απόσταση» *το πολύ k* από τους κόσμους που αναπαριστά η λογική πρόταση ψ, ενώ οι κόσμοι του συνόλου $G^k(mod(\psi))\backslash G^{k-1}(mod(\psi))$ είναι αυτοί που βρίσκονται σε «απόσταση» *ακριβώς k* από τους κόσμους που αναπαριστά η πρόταση ψ. Κατ' αυτόν τον τρόπο μπορούμε πλέον, με την βοήθεια του μετασχηματισμού G, να ορίσουμε τον αλγόριθμο ενημέρωσης ως εξής: $\psi \bullet \mu = \psi'$, όπου $mod(\psi')=mod(G^k(\psi)) \cap mod(\mu)$ και $k \in \mathbb{N}$ είναι ο ελάχιστος ακέραιος για τον οποίο $mod(G^k(\psi)) \cap mod(\mu) \neq \varnothing$. Ισοδυνάμως: $\psi' = \psi \bullet \mu = G^k(\psi) \wedge \mu$, όπου $k \in \mathbb{N}$ ο ελάχιστος ακέραιος για τον οποίο $mod(G^k(\psi) \wedge \mu) \neq \varnothing$.

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι ο παραπάνω τύπος ικανοποιεί τις αρχές του Dalal. Επιπλέον μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι στην ειδική περίπτωση όπου $mod(\psi) \cap mod(\mu) \neq \varnothing$ (μη αντιφατική ενημέρωση), ο αλγόριθμος δίνει $k=0$ και $mod(\psi \bullet \mu)=mod(\psi) \cap mod(\mu)$, δηλαδή $\psi \bullet \mu = \psi \wedge \mu$.

Στην τεχνική αναφορά [8], ο Dalal προχώρησε ένα βήμα παραπέρα, και προσπάθησε να ποσοτικοποιήσει την έννοια της απώλειας πληροφορίας. Έτσι, όρισε την πληροφορία που *προστίθεται* στην βάση κατά την ενημέρωση καθώς και την πληροφορία που *χάνεται* από την βάση κατά την ενημέρωση, και περιορίστηκε στην μελέτη μεθόδων ενημέρωσης που δεν προσθέτουν πληροφορία. Στην συνέχεια όρισε μία διάταξη μεταξύ αλγορίθμων ενημέρωσης, μετρώντας την πληροφορία που χάνεται κατά την ενημέρωση. Συγκρίνοντας (στην [8]) την μέθοδό του με τους

αλγόριθμους που είχαν προτείνει οι Fagin, Ullman και Vardi ([14]), Winslett ([36]), Weber ([33]) και Borgida ([2]), κατέληξε ότι η απώλεια πληροφορίας είναι μικρότερη στον αλγόριθμό του, επομένως ο αλγόριθμος αυτός είναι «καλύτερος» με βάση τις αρχές του Dalal.

2.4 Αξιώματα AGM

Παράλληλα με τις παραπάνω προσεγγίσεις, αναπτύχθηκε από τους Alchourron, Gärdenfors και Makinson μία διαφορετική οπτική του προβλήματος. Η δουλειά αυτή περιγράφεται σε πολλές εργασίες και δημοσιεύσεις (ενδεικτικά αναφέρουμε τις [1, 17, 25]) και είναι ίσως η προσέγγιση που επηρρέασε περισσότερο από οποιαδήποτε άλλη την μελέτη του προβλήματος της αναθεώρησης πεποιθήσεων. Η έμπνευση των συγγραφέων ήταν η προσωρινή παραίτηση από την προσπάθεια εύρεσης συγκεκριμένου αλγορίθμου για το πρόβλημα και η αναζήτηση συγκεκριμένων επιθυμητών ιδιοτήτων ενός τέτοιου αλγορίθμου. Οι ιδιότητες αυτές εκφράστηκαν υπό την μορφή λογικών αξιωμάτων, τα οποία ονομάστηκαν *αξιώματα AGM* (*AGM postulates*) από τα αρχικά των ονομάτων των συγγραφέων.

Τα αξιώματα αυτά αναφέρονται στην πράξη της αναθεώρησης. Κατά την ανάπτυξη των αξιωμάτων υποτίθεται ότι η γνώση αποτελείται από ένα σύνολο K από λογικές προτάσεις, σε αντίθεση με την προσέγγιση του Dalal όπου η γνώση εκφράζεται από μία μόνο λογική έκφραση (και τις συνέπειές τις). Το K είναι κλειστό ως προς την σχέση της παραγωγής, δηλαδή αν υπάρχουν λογικές προτάσεις $P_i \in K$, τέτοιες ώστε η πρόταση: $\wedge_i P_i$ να έπεται την P, τότε $P \in K$. Αν συμβολίσουμε με Cn(K) το σύνολο των επαγόμενων προτάσεων ενός συνόλου K, έχουμε ότι: $Cn(K) = \{p \mid \exists I, i \in I, p_i \in K : \wedge_i p_i \rightarrow p\}$. Με τον συμβολισμό αυτό, θα λέμε ότι ένα σύνολο K είναι κλειστό ως προς την πράξη της παραγωγής αν και μόνο αν K=Cn(K). Τέτοιου είδους σύνολα ονομάζονται και *σύνολα πεποιθήσεων* (*belief sets*). Αν ισχύει ότι $Cn(K)=L^*$, τότε λέμε ότι το K είναι ασυνεπές. Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι τελικά υπάρχει μόνο ένα ασυνεπές σύνολο πεποιθήσεων, το οποίο συμβολίζουμε με $K_\perp$. Το σύνολο αυτό είναι το μοναδικό που περιέχει την λογική πρόταση F.

Για την αντιμετώπιση του προβλήματος της αναθεώρησης, αρχικά ορίζεται η πράξη της *επέκτασης* (*expansion*), η οποία συμβολίζεται με το σύμβολο '+' και είναι η απλή προσθήκη μίας πρότασης p (και των συνεπειών της) σε ένα σύνολο πεποιθήσεων K, χωρίς έλεγχο συνέπειας του αποτελέσματος. Η επέκταση ορίζεται με την βοήθεια του τύπου: $K+p=Cn(K \cup \{p\})$.

Η επέκταση δεν είναι χρήσιμη πράξη διότι δίνει σαν αποτέλεσμα ένα ασυνεπές σύνολο (το $K_\perp$) όταν η νέα πληροφορία αντιφάσκει με την παλιά γνώση. Έτσι ορίζεται και η (πιο ενδιαφέρουσα) πράξη της αναθεώρησης, την οποία θα

συμβολίσουμε με "•". Η πράξη αυτή έχει για κάθε πρόταση p, q και για κάθε σύνολο πεποιθήσεων K τις ακόλουθες ιδιότητες:

(1) Το σύνολο K•p είναι σύνολο πεποιθήσεων.

(2) $p \in K\bullet p$.

(3) $K\bullet p \subseteq K+p$.

(4) Αν $\neg p \notin K$, τότε $K+p \subseteq K\bullet p$.

(5) $K\bullet p = K_{\perp}$ αν και μόνο αν $\models \neg p$.

(6) Αν $\models (p \leftrightarrow q)$ τότε $K\bullet p = K\bullet q$.

(7) $K\bullet(p \wedge q) \subseteq (K\bullet p)+q$.

(8) Αν $\neg q \notin K\bullet p$, τότε $(K\bullet p)+q \subseteq K\bullet(p \wedge q)$.

Τα παραπάνω αξιώματα περιγράφουν τις επιθυμητές ιδιότητες μίας μεθόδου αναθεώρησης του συνόλου K. Με βάση τα AGM αξιώματα, το αποτέλεσμα μιας αναθεώρησης οφείλει να είναι σύνολο πεποιθήσεων (αξίωμα 1). Η νέα πληροφορία θεωρείται εξ ορισμού σωστή και αξιόπιστη (αξίωμα 2), όπως και στην προσέγγιση του Dalal. Η αναθεώρηση και εδώ ταυτίζεται με την επέκταση όταν δεν υπάρχει αντίφαση (αξιώματα 3,4), αλλά δεν δίνει ασυνεπή βάση ως αποτέλεσμα εκτός από την ειδική περίπτωση που η πρόταση p είναι αντινομία (αξίωμα 5). Επίσης, ισοδύναμες αναθεωρήσεις δίνουν ίδια αποτελέσματα (αξίωμα 6). Τα πρώτα 6 αξιώματα ονομάζονται *βασικά* αξιώματα. Τα αξιώματα 7 και 8 αφορούν σύνθετες αναθεωρήσεις και ονομάζονται *βοηθητικά* αξιώματα. Είναι δυσκολότερα στην ερμηνεία και κατανόηση και προστέθηκαν στο βασικό σύνολο αξιωμάτων διότι έχουν πολύ ισχυρές συνέπειες.

Με την βοήθεια των παραπάνω αξιωμάτων μελετήθηκαν σε θεωρητικό επίπεδο κάποιες επιπλέον ιδιότητες της αναθεώρησης ([1, 25]), άμεσες συνέπειες των παραπάνω. Αναπτύχθηκαν αντίστοιχα βασικά και βοηθητικά αξιώματα για την πράξη της αφαίρεσης (την οποία θα συμβολίσουμε με '~') καθώς και οι αντίστοιχες συνέπειές τους. Επίσης, αποδείχθηκε ότι η αφαίρεση μπορεί να οριστεί με την βοήθεια της αναθεώρησης και αντίστροφα. Συγκεκριμένα αποδείχθηκαν οι τύποι:

$K\sim p = K \cap (K\bullet \neg p)$ (Harper identity) και

$K\bullet p = (K\sim \neg p)+p$ (Levi identity).

Οι παραπάνω ταυτότητες έχουν το νόημα ότι για κάθε μέθοδο αναθεωρήσεων η οποία ικανοποιεί τα αξιώματα AGM για τις αναθεωρήσεις, μπορούμε να ορίσουμε μία αντίστοιχη πράξη αφαίρεσης, μέσω της ταυτότητας Harper. Η πράξη αφαίρεσης που θα οριστεί με τον τρόπο αυτό θα ικανοποιεί τα αξιώματα AGM για τις αφαιρέσεις. Αντίστοιχη ιδιότητα ισχύει κατά την μετατροπή από αφαίρεση σε αναθεώρηση μέσω της ταυτότητας Levi.

Αφού ορίστηκαν τα αξιώματα και μελετήθηκαν οι συνέπειές τους, έγινε μία προσπάθεια να οριστεί κάποια συγκεκριμένη πράξη η οποία να ικανοποιεί τα αξιώματα και διαπιστώθηκε ότι υπάρχουν πολλές πράξεις με αυτές τις ιδιότητες. Επειδή θεωρήθηκε ότι η αφαίρεση είναι πιο εύκολη πράξη διαισθητικά, μελετήθηκαν κλάσεις συναρτήσεων αφαίρεσης και όχι αναθεώρησης. Οι αντίστοιχες συναρτήσεις αναθεώρησης μπορούν να υπολογιστούν μέσω της ταυτότητας Levi σε κάθε περίπτωση.

Οι πράξεις αφαίρεσης χωρίστηκαν σε δύο μεγάλες κλάσεις, τις συναρτήσεις *πλήρους τομής* (full-meet contraction functions) και *μερικής τομής* (partial-meet contraction functions). Ορίζουμε $K\perp p$ να είναι το σύνολο των μέγιστων υποσυνόλων B του K για τα οποία $p\notin Cn(B)$, δηλαδή:

$K\perp p=\{B\subseteq K \mid p\notin Cn(B) \text{ και αν } B\subset C\subseteq K \text{ τότε } p\in Cn(C)\}$.

Οι συναρτήσεις πλήρους τομής ορίζονται ως εξής:

$K\sim p=K$, αν το p είναι ταυτολογία

$K\sim p=\gamma(K\perp p)$ διαφορετικά,

όπου γ είναι μία αυθαίρετα οριζόμενη συνάρτηση επιλογής ενός συνόλου μεταξύ των συνόλων που ανήκουν στο $K\perp p$. Αντίστοιχα, οι συναρτήσεις μερικής τομής ορίζονται ως εξής:

$K\sim p=K$, αν το p είναι ταυτολογία

$K\sim p=\cap\gamma(K\perp p)$ διαφορετικά,

όπου γ είναι μία αυθαίρετα οριζόμενη συνάρτηση επιλογής ενός υποσυνόλου του $K\perp p$.

Όπως αναφέρεται στην εργασία [25], οι συναρτήσεις πλήρους τομής ικανοποιούν τα 6 βασικά αξιώματα, αλλά όχι τα δύο βοηθητικά. Τα δύο βοηθητικά αξιώματα ικανοποιούνται υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις. Το ίδιο ισχύει και για τις συναρτήσεις μερικής τομής. Επίσης, οι συναρτήσεις αναθεώρησης που προκύπτουν από τις συναρτήσεις πλήρους τομής δημιουργούν σύνολα πολύ μεγάλα για να είναι χρήσιμα. Έτσι, τα αποτελέσματα των συναρτήσεων πλήρους τομής δεν είναι ικανοποιητικά. Για τον λόγο αυτό εισήχθησαν και οι συναρτήσεις μερικής τομής οι οποίες δίνουν «καλύτερα» διαισθητικά αποτελέσματα.

2.5 Επεκτάσεις των Αξιωμάτων AGM

Την εμφάνιση των αξιωμάτων και των συνεπειών τους ακολούθησε μία ολόκληρη σειρά από εργασίες οι οποίες μελετούσαν τα αξιώματα κάτω από συγκεκριμένο πρίσμα ή εφαρμογή, πρότειναν επεκτάσεις και εναλλακτικές λύσεις ή διαφωνούσαν με την χρήση των αξιωμάτων αυτών.

Έτσι, στην δημοσίευση [23], τα αξιώματα AGM επαναδιατυπώνονται για την περίπτωση της αναθεώρησης πεποιθήσεων με υποθετικές προτάσεις (conditionals).

Στην [11], ορίζεται μία μετρική «ομοιότητας» μεταξύ συνόλων πεποιθήσεων και με την βοήθεια αυτής μελετάται ένα εναλλακτικό σύνολο αξιωμάτων το οποίο διαφέρει από το σύνολο αξιωμάτων που πρότειναν οι Gärdenfors, Alchourron και Makinson.

Μία από τις πιο αξιόλογες επεκτάσεις όμως αποτελεί η εργασία [21], η οποία όπως αναφέραμε και παραπάνω μελετά την διαφορά διορθώσεων και αναθεωρήσεων. Εκεί παρατηρήθηκε ότι τα αξιώματα AGM δεν δίνουν σωστά αποτελέσματα στην περίπτωση της διόρθωσης και προτάθηκε ένα αντίστοιχο σύνολο αξιωμάτων για διορθώσεις. Αντίστοιχα με τα αξιώματα διόρθωσης ορίστηκαν αξιώματα κατάλληλα για την πράξη της διαγραφής. Αποδείχθηκε ότι οι ταυτότητες του Harper και του Levi ισχύουν και για την μετάβαση από την διόρθωση στην διαγραφή (και αντίστροφα) κατά αντίστοιχο τρόπο με την μετάβαση από αναθεώρηση σε αφαίρεση (και αντίστροφα).

Η διατύπωση των αξιωμάτων AGM τα κάνει εφαρμόσιμα σε οποιοδήποτε είδος λογικής, αλλά στις εργασίες [20, 21] μελετάται η περίπτωση της προτασιακής λογικής. Με τον περιορισμό αυτό, μελετάται από τους Katsuno και Mendelzon μία εναλλακτική – και όπως αποδεικνύεται ισοδύναμη – προσέγγιση του προβλήματος με την βοήθεια διατάξεων και μετρικών μεταξύ ερμηνειών της προτασιακής λογικής. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται μία νέα θεωρητική θεμελίωση του προβλήματος και εισάγεται μία διαφορετική ορολογία, κάτω από την οποία επαναδιατυπώνονται τα αξιώματα AGM και τα αντίστοιχα αποτελέσματα. Στην [20], αποδεικνύεται ότι – υπό την νέα προσέγγιση και ορολογία – οι διαφορές μεταξύ των προταθέντων στην βιβλιογραφία αλγορίθμων αναθεώρησης οι οποίοι ικανοποιούν τα AGM αξιώματα, συνίστανται ουσιαστικά στον διαφορετικό τρόπο ορισμού μίας μετρικής και της αντίστοιχης διάταξης μεταξύ ερμηνειών. Τέλος, οι αλγόριθμοι αυτοί επαναδιατυπώθηκαν και μελετήθηκαν ως προς το ποιά αξιώματα ικανοποιούν.

Στην [20], μελετάται και η περίπτωση κατά την οποία η γνώση μας διέπεται από κάποιους περιορισμούς ακεραιότητας, οι οποίοι πρέπει να διατηρούνται μεταξύ των ενημερώσεων. Σε αυτήν την περίπτωση, ορίζεται μία ελαφρά διαφορετική πράξη, με βάση τον τύπο: $K \bullet^{IC} p = K \bullet (p \wedge IC)$, όπου K είναι η γνώση μας, p η νέα πληροφορία, IC οι περιορισμοί ακεραιότητας εκφρασμένοι σαν λογικές προτάσεις, $\bullet^{IC}$ μία πράξη αναθεώρησης η οποία λαμβάνει υπόψη της τους περιορισμούς ακεραιότητας IC και $\bullet$ η ίδια πράξη χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι περιορισμοί αυτοί.

2.6 Αναπαράσταση Γνώσης

Όπως παρατηρήσαμε και παραπάνω, η προσέγγιση του Dalal θεωρεί πως μία λογική έκφραση είναι αρκετή για να εκφράσει την γνώση που περιέχεται στην βάση, ενώ η προσέγγιση των AGM αξιωμάτων χρησιμοποιεί ένα σύνολο πεποιθήσεων, δηλαδή ένα σύνολο λογικών εκφράσεων, οι οποίες είναι κλειστές ως προς την πράξη

της παραγωγής. Η διαφορά αυτή αντικατοπτρίζει μία γενικότερη διαφωνία που υπάρχει στον χώρο και σχετίζεται με την αναπαράσταση της γνώσης. Η αναπαράσταση που θα χρησιμοποιηθεί προφανώς επηρρεάζει και τον τρόπο με τον οποίο θα γίνει η ενημέρωση, άρα είναι πολύ σημαντική για το πρόβλημά μας.

Σε αντίθεση με την προσέγγιση των συνόλων πεποιθήσεων – δηλαδή συνόλων από λογικές εκφράσεις τα οποία είναι κλειστά ως προς την παραγωγή – πολλοί ερευνητές προτείνουν την χρήση *βάσεων πεποιθήσεων* (*belief base*). Οι προσεγγίσεις που χρησιμοποιούν βάσεις πεποιθήσεων βασίζονται στην παρατήρηση ότι, στην γενική περίπτωση, τα σύνολα πεποιθήσεων αποτελούνται από μεγάλο (ενδεχομένως και άπειρο) πλήθος λογικών προτάσεων. Έτσι, πρακτικά είναι δύσκολο ή αδύνατο να υλοποιήσουμε μεθόδους οι οποίες ενημερώνουν σύνολα πεποιθήσεων. Εντούτοις, για κάθε κλειστό ως προς την πράξη της παραγωγής σύνολο λογικών προτάσεων K, υπάρχει σύνολο B με πολύ μικρότερο πλήθος λογικών προτάσεων για το οποίο ισχύει ότι Cn(B)=K. Τέτοια σύνολα ονομάζονται βάσεις πεποιθήσεων και είναι σαφές ότι μία μέθοδος ενημέρωσης που αναφέρεται σε βάσεις πεποιθήσεων θα είναι πολύ ευκολότερα υλοποιήσιμη και αποδοτικότερη σε σχέση με τις μεθόδους που δρουν πάνω σε σύνολα πεποιθήσεων. Μία σημαντική παρατήρηση εδώ είναι ότι εν γένει υπάρχουν περισσότερες της μίας βάσεις για ένα δεδομένο σύνολο πεποιθήσεων και η επιλογή της κατάλληλης βάσης αποτελεί έναν επιπλέον αντικείμενο άξιο μελέτης.

Είναι κοινά αποδεκτό ότι αν θέλουμε να δημιουργήσουμε ένα σύστημα το οποίο θα διαχειρίζεται βάσεις γνώσης σε αποδεκτό χρόνο, είμαστε υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε βάσεις πεποιθήσεων και όχι σύνολα πεποιθήσεων. Τα σύνολα πεποιθήσεων είναι ενδιαφέροντα θεωρητικά κατασκεάσματα, χρήσιμα σε ορισμένες περιπτώσεις σαν ενδεικτικά της ιδανικής κατάστασης, αλλά μικρής αξίας από πρακτικής απόψεως. Και σε θεωρητικό επίπεδο όμως, οι βάσεις πεποιθήσεων δείχνουν καλύτερες κατά τους Nebel ([27]) και Hansson ([19]).

Στην δημοσίευση [19] δίνονται κάποια παραδείγματα υπέρ της άποψης αυτής, ενώ στην [27] τονίζεται ότι οι βάσεις πεποιθήσεων έχουν και σημασιολογική αξία, αφού οι προτάσεις που περιέχονται σε αυτές μπορεί να αντιπροσωπεύουν παρατηρήσεις, δεδομένα, κανόνες κτλ. Έτσι, τοποθετώντας τέτοιες προτάσεις στη βάση πεποιθήσεων τις διαχωρίζουμε αυτόματα από όλες τις υπόλοιπες, παραγόμενες πεποιθήσεις, κάτι που ενδεχομένως και να είναι επιθυμητό. Στην ίδια εργασία προτείνεται ένας αλγόριθμος ενημέρωσης βάσεων πεποιθήσεων και μελετάται η σχέση του με τις συναρτήσεις πλήρους και μερικής τομής των AGM καθώς και τα αξιώματα τα οποία ικανοποιεί. Ο Nebel αδιαφορεί για τον τρόπο με τον οποίο προέκυψε η βάση πεποιθήσεων, επομένως ο αλγόριθμος του δουλεύει, όποια βάση πεποίθησης και αν επιλέξουμε για ένα δεδομένο σύστημα γνώσης.

Ο Gärdenfors ([17]), παρόλο που υποστηρίζει τα σύνολα πεποιθήσεων, παρατηρεί ότι οι βάσεις πεποιθήσεων προσφέρουν μεγαλύτερη εκφραστική

ικανότητα, αφού η ίδια γνώση (σύνολο πεποιθήσεων) μπορεί να προέλθει από περισσότερες της μίας βάσεις πεποιθήσεων. Παρόλα αυτά, χρησιμοποιεί στην [18] την έννοια της *γνωσιακής στήριξης* (epistemic entrenchment), με την βοήθεια της οποίας τα σύνολα πεποιθήσεων αποκτούν την ίδια εκφραστική δύναμη με τις βάσεις πεποιθήσεων. Η γνωσιακή στήριξη είναι ένα είδος καθοριζόμενης από τον χρήστη διάταξης μεταξύ πεποιθήσεων. Η διάταξη αυτή χρησιμοποιείται όταν πρέπει να επιλέξουμε κάποια πεποίθηση προς απόρριψη (σε αντιφατικές ενημερώσεις), και όπως αποδεικνύει ο Gärdenfors, μας επιτρέπει να εκφράσουμε εμμέσως σχέσεις αιτιότητας.

Όπως έχουμε ήδη τονίσει, στο πρόβλημα της αναθεώρησης γνώσης μας ενδιαφέρει σε μεγάλο βαθμό να ενεργούμε σε συμφωνία με την ανθρώπινη διαίσθηση. Επομένως, πολύ μεγάλο ρόλο στην επιλογή του βέλτιστου τρόπου αποθήκευσης γνώσης παίζει και η αντίστοιχη (αλλά όχι ισοδύναμη) φιλοσοφική αντιπαράθεση ως προς τον τρόπο αποθήκευσης γνώσης στον ανθρώπινο εγκέφαλο. Στην φιλοσοφία υπάρχουν δύο θεωρίες ως προς αυτό, τις οποίες αναλύει με εξαιρετικό τρόπο ο Gärdenfors στην εργασία [18].

Η *θεωρία θεμελιωδών πεποιθήσεων* (*foundations theory*) βασίζεται στην αρχή ότι μαζί με την γνώση πρέπει να αποθηκεύονται και οι αιτίες της γνώσης. Υπάρχουν κάποιες πεποιθήσεις οι οποίες ονομάζονται *θεμελιώδεις* (*foundational*). Οι θεμελιώδεις πεποιθήσεις είναι αυτόνομες και ισχύουν χωρίς να υπάρχει ανάγκη αιτιολόγησής τους, αλλά όλες οι υπόλοιπες οφείλουν να υποστηρίζονται (δηλαδή να έπονται) άμεσα ή έμμεσα από αυτές.

Σε αντίθεση με την θεωρία θεμελιωδών πεποιθήσεων, η *θεωρία συναφών πεποιθήσεων* (*coherence theory*), βασίζεται στην αρχή ότι κάθε πεποίθηση είναι αυτόνομη, ανεξάρτητη και αδιαμφισβήτητη. Δεν υπάρχει ανάγκη αιτιολόγησης μίας πεποίθησης και κάθε κομμάτι γνώσης είναι δεκτό από μόνο του, αρκεί να μην αντιφάσκει με την υπόλοιπη γνώση.

Δυστυχώς, καμία από τις δύο θεωρίες δεν έχει αποδειχθεί. Έγιναν πειράματα ([18]) τα οποία δείχνουν ότι από την στιγμή που μία πεποίθηση γίνει αποδεκτή από κάποιον, αυτός συνεχίζει να την πιστεύει, ακόμα και αν η αιτία η οποία τον ώθησε αρχικά να την κάνει αποδεκτή παύει να υφίσταται. Αυτό υποννοεί ότι η θεωρία συναφών πεποιθήσεων είναι σωστότερη. Οι οπαδοί της θεωρίας θεμελιωδών πεποιθήσεων όμως σχολιάζουν ότι τα πειράματα αποδεικνύουν απλά την πρακτική δυσκολία που υπάρχει στην αποθήκευση τόσων πεποιθήσεων και των αιτιών τους (κάτι το οποίο ισχύει και στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές). Έτσι – κατά τους υποστηρικτές της θεωρίας θεμελιωδών πεποιθήσεων – αν μία πεποίθηση Α γίνει δεκτή αποκλειστικά λόγω της ύπαρξης μίας άλλης πεποίθησης Β, και εκ των υστέρων πάψουμε να πιστεύουμε την Β, πρέπει να απορρίψουμε και την Α. Το ότι διατηρείται και η Α είναι λάθος, γι’ αυτό άλλωστε και αν υποδειχθεί στο άτομο υπό εξέταση ότι ο

μοναδικός λόγος για τον οποίο πίστευε το Α ήταν το Β, τότε το άτομο αυτό είναι πρόθυμο να παραιτηθεί και από την πεποίθηση Α. Αυτό άλλωστε συμφωνεί και με την κοινή λογική. Επομένως, το αποτέλεσμα των πειραμάτων αιτιολογείται με το επιχείρημα ότι τα εξεταζόμενα άτομα δεν *αγνοούν* αλλά *ξεχνούν* τις σχέσεις αιτιότητας.

Με την πρώτη ματιά, θα λέγαμε ότι η θεωρία θεμελιωδών πεποιθήσεων μας παροτρύνει να χρησιμοποιήσουμε βάσεις πεποιθήσεων, ενώ η θεωρία συναφών πεποιθήσεων υποννοεί ότι τα σύνολα πεποιθήσεων είναι προτιμότερα. Αυτό όμως δεν είναι απόλυτα ακριβές, όπως φαίνεται και στην [17], μιας και οι δύο διαχωρισμοί είναι σε μεγάλο βαθμό ανεξάρτητοι.

Η θεωρία θεμελιωδών πεποιθήσεων μας υποχρεώνει να κρατάμε τις αιτίες για τις πεποιθήσεις μας, ωστόσο δεν μας περιορίζει ως προς το ποιές πεποιθήσεις θα αποθηκεύονται ρητώς και ποιές θα προκύπτουν από τις αποθηκευμένες. Τόσο οι παραγόμενες πεποιθήσεις, όσο και οι αιτίες τους μπορούν να προκύπτουν από τις αποθηκευμένες λογικές προτάσεις. Έτσι, έχουμε την ελευθερία να χρησιμοποιήσουμε είτε βάσεις είτε σύνολα πεποιθήσεων, αρκεί να διατηρούνται οι σχέσεις αιτιότητας. Από την άλλη, η θεωρία συναφών πεποιθήσεων δεν απαιτεί την αποθήκευση σχέσεων αιτιότητας μεταξύ κομματιών γνώσης. Και πάλι όμως μπορούμε να αποθηκεύουμε ρητώς είτε όλες, είτε ένα μέρος των πεποιθήσεών μας, αρκεί να υπάρχει τρόπος το μη αποθηκευμένο κομμάτι γνώσης να προέλθει από το αποθηκευμένο. Οι σχέσεις εξάρτησης που έμμεσα δημιουργούνται κατά την διαδικασία ανάκτησης της πλήρους γνώσης μπορούν απλά να αγνοηθούν κατά τις ενημερώσεις.

Για παράδειγμα, ο Dalal χρησιμοποιεί μία μόνο λογική πρόταση σαν βάση γνώσης η οποία στην πράξη είναι η σύζευξη όλων των προτάσεων του συνόλου πεποιθήσεων που αναπαριστά την γνώση μας. Μπορεί να αποδειχθεί ότι η σύζευξη όλων των προτάσεων ενός συνόλου πεποιθήσεων K ανήκει στο K και έχει ως συνέπειά της όλες τις προτάσεις του K. Επομένως, ο Dalal επέλεξε μία από τις βάσεις πεποιθήσεων της γνώσης, πάνω στην οποία εφαρμόζει τον αλγόριθμό του. Όμως δεν χρησιμοποιείται πουθενά καμία σχέση αιτιότητας, άρα λοιπόν ο Dalal χρησιμοποιεί την θεωρία συναφών πεποιθήσεων.

Πάντως, σε ένα σύστημα το οποίο χρησιμοποιεί βάσεις γνώσεων, όπως το παραπάνω, η επιλογή της θεωρίας παίζει σημαντικό ρόλο ως προς την τρόπο επιλογής της βάσης πεποιθήσεων. Δύο διαφορετικές βάσεις του ίδιου συνόλου πεποιθήσεων θα δώσουν διαφορετικές αιτίες για τις ίδιες πεποιθήσεις, άρα λοιπόν χρειάζεται προσοχή ως προς την επιλογή της βάσης αν δεχτούμε την θεωρία θεμελιωδών πεποιθήσεων. Στην θεωρία συναφών πεποιθήσεων αυτό δεν συμβαίνει, διότι οι σχέσεις αιτιότητας αγνοούνται. Έτσι ο Dalal προτίμησε την απλούστερη δυνατή βάση πεποίθησης για τον αλγόριθμό του, ενώ οι υποστηρικτές της θεωρίας θεμελιωδών πεποιθήσεων θα προτιμούσαν σαν βάση πεποίθησης ένα σύνολο από στοιχειώδεις πεποιθήσεις, οι

οποίες θα μπορούσαν να αντιπροσωπεύουν παρατηρήσεις σχετικές με τον υπό μοντελοποίηση κόσμο ([27]) και θα έδιναν τις «σωστές» σχέσεις αιτιότητας μεταξύ των πεποιθήσεων της βάσης.

2.7 Πολλαπλές Ενημερώσεις

Οι μέθοδοι *πολλαπλών ενημερώσεων* (*iterated belief revision*) ασχολούνται με την περίπτωση ακολουθιών ενημερώσεων, σε αντίθεση με τις ως τώρα αναφερθείσες μεθόδους οι οποίες ασχολούνται με την βάση και μία μόνο ενημέρωση. Παρατηρείται ([10, 24, 27]) ότι για ειδικές ακολουθίες ενημερώσεων οι παραπάνω μέθοδοι μπορεί να δώσουν διαισθητικά λανθασμένα τελικά αποτελέσματα.

Έτσι, στην εργασία [27], ο Nebel παρατηρεί ότι ο αλγόριθμος ενημέρωσης βάσεων πεποιθήσεων που προτείνει ο ίδιος έχει προβλήματα στην περίπτωση επαναλαμβανόμενων ενημερώσεων. Στην [10] παρατηρείται ότι υπάρχουν αλγόριθμοι ενημέρωσης οι οποίοι ικανοποιούν τα αξιώματα AGM και οι οποίοι δίνουν αποτελέσματα αντίθετα προς την κοινή λογική σε επαναλαμβανόμενες ενημερώσεις. Έτσι προτείνονται κάποια νέα αξιώματα για επαναλαμβανόμενες αναθεωρήσεις, και μελετάται η σχέση τους με τα AGM αξιώματα, καθώς και με την προσέγγιση των Katsuno και Mendelzon ([20]). Επίσης, παρατηρείται ότι προκειμένου να γίνουν σωστά επαναλαμβανόμενες ενημερώσεις, πρέπει να αποθηκεύεται στην βάση γνώσης και η πολιτική ενημερώσεων. Δηλαδή, δεν αρκεί η αποθήκευση της γνώσης, αλλά επιβάλλεται και η αποθήκευση με κάποιο τρόπο και της συμπεριφοράς της βάσης μετά από κάθε πιθανή μελλοντική ενημέρωση, όπως και η τυχόν μεταβολή της παραπάνω πολιτικής ενημέρωσης. Τέλος, η εργασία [24] αποτελεί μία μελέτη των προταθέντων αλγορίθμων πολλαπλών ενημερώσεων, στην οποία επίσης μελετάται η πολυπλοκότητα των αλγορίθμων αυτών.

2.8 Απόρριψη και Αποδοχή Πεποιθήσεων

Είδαμε ότι κατά την ενημέρωση μίας βάσης με κάποια αντιφατική ενημέρωση, είμαστε υποχρεωμένοι να απορρίψουμε κάποιο κομμάτι από την γνώση μας. Η επιλογή της γνώσης προς απόρριψη μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους και έχει δύο σκέλη που αφορούν πρώτον την αποδοχή (ή μη) της ενημέρωσης και δεύτερον, εφόσον η ενημέρωση γίνει αποδεκτή, την επιλογή της πληροφορίας από την βάση που θα επιλεγεί προς απόρριψη.

Ένας από τους τρόπους περιγράφεται στην [4], όπου το σύστημα ενημέρωσης γνώσης θεωρείται ένας αυτόνομος πράκτορας (agent), ο οποίος κρίνει σε κάθε ενημέρωση αν θα την δεχτεί ή όχι, τι πληροφορία θα απορρίψει από την βάση κοκ. Τα κριτήρια επιλογής είναι η αξιοπιστία της πηγής πληροφορίας, οι πεποιθήσεις και οι στόχοι του πράκτορα, οι σχέσεις μεταξύ των πεποιθήσεων αυτών και η απώλεια πληροφορίας ανά περίπτωση.

Ένας συνηθέστερος τρόπος επιλογής είναι με την χρήση της αρχής προτεραιότητας ενημέρωσης του Dalal, η οποία χρησιμοποιείται και στις μεθόδους που ικανοποιούν τα αξιώματα AGM. Η αρχή αυτή λέει ότι η ενημέρωση είναι αδιαμφισβήτητη άρα λοιπόν η γνώση που θα απορριφθεί πρέπει με κάποιο τρόπο να επιλεγεί από την βάση. Η επιλογή της γνώσης που θα απορριφθεί από την βάση γίνεται με γνώμονα την αρχή διατήρησης παλιάς πληροφορίας του Dalal ή το ισοδύναμο *κριτήριο οικονομίας πληροφορίας* (*criterion of informational economy*) του Gärdenfors ([18]). Η αρχή αυτή ορίζει ότι η απώλεια πληροφορίας οφείλει να είναι η ελάχιστη δυνατή.

Η δυσκολία που προκύπτει με την παραπάνω προσέγγιση είναι η μέτρηση της απώλειας πληροφορίας, πρόβλημα που αντιμετωπίζεται με διαφορετικούς τρόπους στην βιβλιογραφία. Ο Dalal ([8]) προτείνει μία μέθοδο βασισμένη σε λογικές προτάσεις οι οποίες «εκφράζουν» την χαμένη πληροφορία. Ο Gärdenfors προτείνει την πιο διαδεδομένη τεχνική της γνωσιακής στήριξης, την οποία είδαμε και παραπάνω, η οποία χρησιμοποιείται σε διάφορες εργασίες ([18, 34]). Η τεχνική αυτή αποδεικνύεται ([18]) ότι δίνει επιπλέον την δυνατότητα να εκφραστούν σχέσεις αιτιότητας μεταξύ πεποιθήσεων, όπως παρατηρήθηκε και παραπάνω. Παραπλήσιες τεχνικές χρησιμοποιούνται και σε άλλες εργασίες ([14, 35]). Στην [14] επιπλέον μελετώνται οι εφαρμογές της τεχνικής αυτής σε θέματα ασφάλειας δεδομένων.

2.9 Άλλες Τεχνικές και Σκέψεις

Το πρόβλημα της αναθεώρησης πεποιθήσεων έχει όπως είδαμε πολλές πτυχές και υποπροβλήματα, κάτι το οποίο υποδηλώνει ότι διαφορετικοί αλγόριθμοι μπορεί να είναι καλύτεροι ή χειρότεροι, ανάλογα με την εφαρμογή. Αυτό φαίνεται και από την πληθώρα προτάσεων που υπάρχουν, όπως και από την ασυμφωνία σε βασικά ζητήματα σχετικά με το πρόβλημα. Στην βιβλιογραφία έχουν προταθεί διάφοροι αλγόριθμοι, για ειδικούς σκοπούς ([4, 34, 35]) ή γενικής φύσεως ([1, 8, 14, 22, 24]), υλοποιημένοι ([4, 12, 24, 32, 34, 35]), θεωρητικού ([1, 11, 20, 23, 25]) ή πρακτικού ([8, 27, 32, 36]) ενδιαφέροντος.

Έτσι, στην εργασία [4] μελετάται το πρόβλημα για την περίπτωση που το σύστημα διαχείρησης πληροφορίας (και ενημέρωσης) είναι ένας πράκτορας με συγκεκριμένους στόχους, πεποιθήσεις και συμπεριφορά. Στην [34] περιγράφεται η υλοποίηση ενός συστήματος αναθεώρησης και διαχείρησης πληροφορίας στην γλώσσα προγραμματισμού Java για χρήση στο διαδίκτυο. Στην [35] προτείνεται ένας αλγόριθμος ο οποίος εκτελεί γρήγορα ενημερώσεις. Ο αλγόριθμος αυτός έχει ενδιαφέρον διότι εκτελεί γρήγορα μία «μερική» ενημέρωση – δηλαδή μία ενημέρωση όχι απόλυτα σωστή – την οποία προσπαθεί συνεχώς να βελτιώσει προσεγγίζοντας την «ιδανική» ενημέρωση. Όσο περισσότερο επιτρέψουμε στον αλγόριθμο να τρέξει, τόσο καλύτερη είναι η προσέγγιση. Οι δύο αυτές εργασίες ([34, 35]) αποτελούν

παραδείγματα υλοποίησης αλγορίθμων που ικανοποιούν τα AGM αξιώματα. Στην [12] έχουμε μία από τις σημαντικότερες τεχνικές, η οποία έχει αναρίθμητες εφαρμογές και προσφέρει τεράστιες δυνατότητες. Είναι όμως αρκετά περίπλοκη και πάσχει στον τομέα της ταχύτητας. Τέλος, στην [32] γίνεται μία μετάθεση του προβλήματος της αναθεώρησης πεποιθήσεων στο πρόβλημα της διάγνωσης λαθών και χρησιμοποιείται έτσι μία παραλλαγή ενός προϋπάρχοντος αλγορίθμου του Reiter.

Οι αλγόριθμοι που έχουν αναπτυχθεί καλύπτουν πολλές από τις ανάγκες μας. Εντούτοις, η κάθε προσέγγιση έχει τα δικά της προβλήματα και ισχυρά σημεία. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε τα θετικά και αρνητικά στοιχεία κάθε τεχνικής και θα παρουσιάσουμε την συλλογιστική που μας οδήγησε στην ανάπτυξη του μοντέλου μας. Όπως θα δούμε το μοντέλο αυτό είναι παραμετροποιήσιμο σε μεγάλο βαθμό, με συνέπεια την δυνατότητα χρήσης του σε πολλές εφαρμογές. Αυτός ήταν και ένας από τους βασικούς μας στόχους κατά την ανάπτυξή του.

Κεφάλαιο 3: Συλλογισμοί και Παραδοχές

3.1 Εισαγωγή

Παρατηρήσαμε ήδη από το προηγούμενο κεφάλαιο τις διαφορετικές απόψεις που υπάρχουν στο πρόβλημα της αναθεώρησης πεποιθήσεων. Η ανάλυση που προηγήθηκε δείχνει ότι το πρόβλημα έχει δύο βασικές δυσκολίες: η πρώτη είναι η εύρεση του βέλτιστου διαισθητικά τρόπου ενημέρωσης και η δεύτερη η ανάπτυξη και υλοποίηση μίας μεθόδου η οποία θα εκτελεί την ενημέρωση αυτή σε κάποιο υπολογιστικό σύστημα. Σε δεύτερη φάση θα θέλαμε η μέθοδος ενημέρωσης να είναι ευέλικτη, ώστε να δίνει κατά το δυνατόν περισσότερες δυνατότητες στον χρήστη. Η ταχύτητα ενημερώσεων και επερωτήσεων και η εκφραστική δύναμη της αναπαράστασης που θα χρησιμοποιήσουμε είναι επίσης αρκετά σημαντικοί παράγοντες που πρέπει να ληφθούν υπόψη.

Στο παρόν κεφάλαιο θα κάνουμε κάποιες σκέψεις και σχόλια σχετικά με τις μεθόδους που περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Επίσης, θα περιγράψουμε κάποιες από τις ιδιότητες που θα θέλαμε να έχει ένας αλγόριθμος ενημέρωσης και θα επιχειρηματολογήσουμε υπέρ αυτών. Τέλος, θα κάνουμε κάποιες παραδοχές ως προς τον τρόπο αναπαράστασης της γνώσης και θα δούμε την συλλογιστική που μας οδήγησε στην ανάπτυξη των μεθόδων που θα περιγράψουμε στα επόμενα κεφάλαια.

3.2 Αναπαράσταση Γνώσης – Βασικές Σκέψεις

Ένα από τα πρώτα προβλήματα το οποίο θα πρέπει να μας απασχολήσει είναι η αναπαράσταση της γνώσης, αφού η όποια μέθοδος αναθεώρησης θα βασιστεί πάνω στην αναπαράσταση αυτή. Θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας σε βάσεις γνώσεων οι οποίες περιέχουν προτάσεις της προτασιακής λογικής. Αυτό αυτόματα μας περιορίζει, αφού η προτασιακή λογική έχει κάποιους συγκεκριμένους περιορισμούς εκφραστικότητας.

Όπως είδαμε, η προτασιακή λογική βασίζεται σε μία γλώσσα L. Η L μπορεί να περιέχει πεπερασμένο ή αριθμήσιμα άπειρο πλήθος ατόμων. Οι τελεστές που θα χρησιμοποιήσουμε είναι οι 5 κλασικοί τελεστές της σύζευξης ($\wedge$), διάζευξης ($\vee$), άρνησης ($\neg$), συνεπαγωγής ($\rightarrow$) και ισοδυναμίας ($\leftrightarrow$). Έχει αποδειχθεί ότι οι τρεις πρώτοι (σύζευξη, διάζευξη, άρνηση) είναι αρκετοί για να εκφράσουν οποιαδήποτε γνώση μέσα στις εκφραστικές δυνατότητες του προτασιακού λογισμού ([6, 28, 32]). Οι τελεστές της συνεπαγωγής και ισοδυναμίας συμπεριλαμβάνονται λόγω της συχνής

τους χρήσης. Κάθε άτομο της γλώσσας θεωρούμε ότι αντιπροσωπεύει ένα συγκεκριμένο, στοιχειώδες κομμάτι γνώσης. Θα αναθέσουμε δηλαδή σε κάθε άτομο μία απλή πρόταση της φυσικής γλώσσας, η οποία μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής. Έτσι για παράδειγμα μπορούμε να συμβολίζουμε με α_1 την πρόταση: «το βιβλίο βρίσκεται πάνω στο τραπέζι» και με α_2 την πρόταση: «το βιβλίο έχει κόκκινο εξώφυλλο».

Κάθε βάση γνώσης μοντελοποιεί ένα υποσύνολο της πραγματικότητας. Σε κάθε βάση θα μας ενδιαφέρει μόνο αυτό το υποσύνολο της πραγματικότητας το οποίο θα ονομάζουμε *κόσμο* και θα αδιαφορούμε για οτιδήποτε εκτός αυτού. Υποθέτουμε ότι ο κόσμος που μοντελοποιούμε έχει σε κάθε χρονική στιγμή μία ακριβώς κατάσταση. Η κατάσταση του κόσμου περιγράφεται πλήρως από μία ερμηνεία, δηλαδή από τις τιμές ενός διατεταγμένου συνόλου από δυαδικές (True, False) μεταβλητές, οι οποίες είναι τα άτομα της γλώσσας. Ισοδυνάμως, θα λέμε ότι ο κόσμος μας περιγράφεται από μία ερμηνεία – έστω W – την οποία και αναζητούμε.

Έτσι, αν υποθέσουμε ότι η γλώσσα μας αποτελείται από τα δύο παραπάνω άτομα α_1 και α_2, τότε ενδιαφερόμαστε για ακριβώς δύο χαρακτηριστικά του κόσμου: το πρώτο είναι η θέση του βιβλίου (αν βρίσκεται πάνω στο τραπέζι ή όχι) και το δεύτερο είναι το χρώμα του εξωφύλλου (αν είναι κόκκινο ή όχι). Συνεπώς ο κόσμος μας μπορεί να πάρει μία από τέσσερις διαφορετικές καταστάσεις (ερμηνείες), τις (T,T), (T,F), (F,T), (F,F). Πολλές φορές καταχρηστικά θα ονομάζουμε τις ερμηνείες κόσμους.

Δεχόμαστε από την αρχή την πιθανότητα ελλιπούς και ενδεχομένως λανθασμένης γνώσης, συνεπώς δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι η ερμηνεία W περιγράφεται από (ικανοποιεί) την βάση γνώσης μας. Έτσι, θα μιλάμε με σχετικούς και όχι απόλυτους όρους, δηλαδή θα λέμε ότι *με βάση την τρέχουσα γνώση μας* η κατάσταση (ερμηνεία) X είναι ο πραγματικός κόσμος, ή ενδεχομένως ότι ο πραγματικός κόσμος είναι *με βάση την τρέχουσα γνώση μας* ένας από τους $X_1,X_2,...,X_n$. Γενικότερα, θα μας ενδιέφερε να ορίσουμε ένα είδος διάταξης, το οποίο θα μας λέει αν κάποιος κόσμος X είναι *πιθανότερος με βάση την τρέχουσα γνώση* σε σχέση με κάποιον άλλο κόσμο Y.

Για το παραπάνω παράδειγμα, το α_1 μπορεί στην πραγματικότητα (πραγματικός κόσμος) να είναι ή αληθές ή ψευδές, αλλά όχι και τα δύο, διότι το βιβλίο ή θα βρίσκεται πάνω στο τραπέζι ή δεν θα βρίσκεται πάνω στο τραπέζι. Εντούτοις, ενδέχεται να μην έχουμε καμία πληροφορία για την θέση του βιβλίου, επομένως θα είμαστε εξίσου πρόθυμοι να δεχτούμε τόσο την κατάσταση α_1, όσο και την κατάσταση $\neg\alpha_1$ (α_1=T και α_1=F αντίστοιχα). Το γεγονός ότι περισσότεροι από ένας κόσμοι είναι πιθανοί δεν σημαίνει ότι ο κόσμος μας είναι διττός, αλλά ότι η γνώση μας είναι ελλιπής και ελπίζουμε σε μελλοντικές ενημερώσεις να ξεδιαλύνουν την κατάσταση.

Ο κόσμος υπό μοντελοποίηση μπορεί να είναι δυναμικός. Είμαστε λοιπόν υποχρεωμένοι να δεχτούμε ότι η πραγματική κατάσταση του κόσμου μπορεί να αλλάζει με τον χρόνο. Στην παρούσα μελέτη δεν θα μας απασχολήσουν χρονικά γνωρίσματα. Μας απασχολεί μόνο να προσεγγίσουμε την τρέχουσα κατάσταση, αδιαφορώντας για μελλοντικές ή προηγούμενες καταστάσεις. Με δεδομένο όμως ότι η κατάσταση αυτή μπορεί να αλλάξει, πρέπει να δίνουμε την δυνατότητα στον χρήστη να ενημερώσει την βάση για την αλλαγή αυτή ώστε η γνώση μας να είναι κατά το δυνατό σωστή και ενημερωμένη ανά πάσα στιγμή.

Οι δύο παραπάνω παρατηρήσεις δείχνουν ότι η πληροφορία της βάσης μπορεί να είναι λάθος είτε επειδή ο πραγματικός κόσμος άλλαξε, είτε επειδή η βάση μας περιέχει λανθασμένη ή ελλιπή πληροφορία. Συνεπώς, πρέπει να δίνουμε στον χρήστη την δυνατότητα να εκτελεί και αναθεωρήσεις και διορθώσεις. Παρόλο που στην βιβλιογραφία οι δύο πράξεις θεωρούνται (και είναι) διαφορετικές, θα θέλαμε – αν είναι εφικτό – να υπάρχει μία κοινή τεχνική εκτέλεσης των δύο τύπων ενημερώσεων. Αντίστοιχα, θα επιθυμούσαμε να συμπεριλάβουμε τις πράξεις της διαγραφής και της αφαίρεσης στο μοντέλο μας, αν αυτό είναι εφικτό.

Τέλος, επειδή η γνώση μας για τον κόσμο έχει διαμορφωθεί μέσα από ένα πεπερασμένο πλήθος παρατηρήσεων-ενημερώσεων, και επειδή η λογική πρόταση που αναπαριστά κάθε ενημέρωση περιέχει πεπερασμένο πλήθος συμβόλων, ανά πάσα στιγμή η βάση μας θα περιέχει ένα πεπερασμένο πλήθος ατόμων. Έτσι μπορούμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας να υποθέσουμε ότι η γλώσσα μας περιέχει ένα πεπερασμένο πλήθος ατόμων, το πλήθος των οποίων μπορεί και να αλλάζει, αλλά που είναι πάντως πεπερασμένο σε κάθε περίπτωση. Αυτή η παραδοχή είναι πολύ σημαντική για την συνέχεια και απαραίτητη για τον μετασχηματισμό πινάκων.

3.3 Βάσεις Πεποιθήσεων και Ενημερώσεις

Επειδή ο τελικός μας στόχος είναι η ανάπτυξη ενός άμεσα υλοποιήσιμου αλγορίθμου, είμαστε υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε βάσεις και όχι σύνολα πεποιθήσεων. Για τον τρόπο επιλογής των λογικών προτάσεων που θα ανήκουν στην βάση πεποιθήσεων, θα ακολουθήσουμε το σκεπτικό του Nebel ([27]). Με βάση το σκεπτικό αυτό, κάθε ενημέρωση αντιπροσωπεύει μία παρατήρηση ή πείραμα ή κανόνα, την ύπαρξη του οποίου κάνουμε γνωστή στην βάση διαμέσου της ενημέρωσης. Η γνώση μας συνεπώς προέρχεται από το (ενδεχομένως διατεταγμένο) σύνολο των ενημερώσεων αυτών και κατ' επέκταση η βάση γνώσης που θα χρησιμοποιηθεί θα είναι το παραπάνω σύνολο.

Βλέπουμε ότι εμμέσως έχουμε δεχτεί την θεωρία θεμελιωδών πεποιθήσεων, αφού θεωρούμε ότι η γνώση προέρχεται από τις θεμελιώδεις λογικές προτάσεις που αντιπροσωπεύουν τις παρατηρήσεις μας. Ο λόγος που επιλέχθηκε η συγκεκριμένη θεωρία είναι διότι θεωρούμε ότι αντιπροσωπεύει την κοινή λογική. Κάθε λογική

πρόταση μπορεί να ισχύει είτε διότι αυτό αποδεικνύεται από κάποια παρατήρηση ή πείραμα (άμεσα) είτε διότι αυτό προκύπτει έμμεσα, με χρήση σχέσεων παραγωγής, από κάποιες παρατηρήσεις ή πειράματα. Οι σχέσεις αιτιότητας μπορούν να αποθηκεύονται ή και να μην αποθηκεύονται, αφού υποννοούνται εμμέσως από την επιλογή της βάσης. Επιπλέον, μας ενδιαφέρει η απόρριψη μίας λογικής πρότασης όταν πλέον δεν έχουμε επαρκείς λόγους (δεδομένα στην βάση γνώσης) για να την πιστεύουμε.

Θα προσπαθήσουμε να αιτιολογήσουμε την επιλογή μας με ένα παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι κάνουμε κατά σειρά τις παρατηρήσεις $\mu_1=\alpha_1$ και $\mu_2=\alpha_1\rightarrow\alpha_2$. Αν υποθέσουμε ότι δεν έχουμε καμία άλλη πληροφορία για τον κόσμο, η σωστή ενημέρωση της βάσης μας με τις παραπάνω δύο παρατηρήσεις θα πρέπει να μας δώσει έναν μόνο πιθανό κόσμο, αυτόν στον οποίο ισχύει $\alpha_1=\alpha_2=T$ (δηλαδή την πρόταση $\alpha_1\wedge\alpha_2$). Έστω επίσης ότι μία νέα παρατήρηση μ_3 μας λέει ότι η αρχική μας παρατήρηση μ_1 ήταν λάθος, και ότι τελικά ισχύει: $\mu_3=\neg\alpha_1$. Αν κάνουμε την παραδοχή ότι η μ_3 είναι αποδεκτή (κατά το κριτήριο προτεραιότητας ενημέρωσης του Dalal), τότε είμαστε υποχρεωμένοι να δεχτούμε ότι στον πραγματικό κόσμο ισχύει $\alpha_1=F$ ή ισοδύναμα $\neg\alpha_1$. Αυτό ισχύει ανεξαρτήτως της θεωρίας που ακολουθούμε (συναφών ή θεμελιωδών πεποιθήσεων). Η τιμή όμως του α_2 στον πραγματικό κόσμο επηρρεάζεται από την θεωρία που θα ακολουθήσουμε.

Σύμφωνα με την θεωρία συναφών πεποιθήσεων, η αποδοχή της $\mu_3=\neg\alpha_1$, δεν επηρρεάζει με κανένα τρόπο την τιμή που οφείλει να έχει το α_2 στον πραγματικό κόσμο. Από την στιγμή που η πρόταση α_2 (δηλαδή το γεγονός ότι $\alpha_2=T$) δεν αντιφάσκει με την $\neg\alpha_1$, δεχόμαστε ότι η α_2 ισχύει αφού δεν έχουμε λόγο να την αλλάξουμε. Επομένως, ο πραγματικός κόσμος αντιπροσωπεύεται από την ερμηνεία (F,T). Εδώ να επισημάνουμε ότι αυτό θα είναι το αποτέλεσμα της ενημέρωσης αν χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο του Dalal ([8, 9]) για παράδειγμα.

Από την άλλη, η θεωρία θεμελιωδών πεποιθήσεων υποστηρίζει ότι αλλάζοντας την τιμή του α_1 στον πραγματικό κόσμο χάνουμε κάθε λόγο να πιστεύουμε και στην αλήθεια του α_2. Ο μόνος λόγος για τον οποίο πιστεύαμε στην α_2 (δηλαδή ότι $\alpha_2=T$), ήταν το γεγονός ότι ο συνδυασμός των παρατηρήσεων μ_1 και μ_2 έδινε ως συνέπειά του την α_2. Τώρα που μάθαμε ότι η μ_1 δεν ισχύει, οφείλουμε να απορρίψουμε και την πεποίθηση ότι $\alpha_2=T$. Η νέα μας άποψη σχετικά με τον κόσμο είναι ότι αυτός αντιπροσωπεύεται από μία από τις ερμηνείες (F,T), (F,F).

Θεωρούμε ότι η δεύτερη προσέγγιση είναι σωστότερη διαισθητικά και πιο κοντά στην κοινή λογική. Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει το γεγονός αυτό αντικαθιστώντας τα άτομα α_1 και α_2 με τις προτάσεις της φυσικής γλώσσας με τις οποίες τις αντιστοιχίσαμε παραπάνω, δηλαδή την α_1 με την πρόταση: «το βιβλίο βρίσκεται πάνω στο τραπέζι» και την α_2 με την πρόταση: «το βιβλίο έχει κόκκινο

εξώφυλλο». Αν μας έλεγαν ότι το βιβλίο βρίσκεται πάνω στο τραπέζι (μ_1), ότι αν βρίσκεται πάνω στο τραπέζι τότε έχει κόκκινο εξώφυλλο (μ_2) και τελικά ότι το βιβλίο δεν βρίσκεται πάνω στο τραπέζι (μ_3), τότε το μόνο που θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε τελικά είναι ότι το βιβλίο δεν βρίσκεται πάνω στο τραπέζι ($\neg\alpha_1$). Αν κάποιος εξακολουθούσε να πιστεύει ότι το βιβλίο έχει κόκκινο εξώφυλλο (α_2) και μετά την εισαγωγή του μ_3, αυτό θα ήταν επειδή είχε ξεχάσει τους λόγους για τους οποίους το πίστευε αυτό αρχικά, οι οποίοι ήταν απλά η συνύπαρξη των μ_1 και μ_2 στην βάση γνώσης σε κάποια στιγμή στο παρελθόν. Αν του υποδειχθεί το γεγονός αυτό, θα είναι πρόθυμος να εγκαταλείψει τις πεποιθήσεις του σχετικά με το α_2. Οι παραπάνω σκέψεις μας ώθησαν στην εγκατάλειψη της θεωρίας συναφών πεποιθήσεων.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, θα λέγαμε ότι τελικά η γνώση μας αποτελείται από το διατεταγμένο σύνολο των λογικών προτάσεων που εισήχθησαν ως ενημερώσεις στην βάση γνώσης. Η διάταξη των προτάσεων στο σύνολο αυτό είναι απαραίτητη λόγω της χρήσης της αρχής προτεραιότητας του Dalal, διότι η αρχή αυτή λέει εμμέσως ότι νεώτερες παρατηρήσεις είναι πιο αξιόπιστες από παλαιότερες. Αν η αρχή αυτή δεν χρησιμοποιηθεί, τότε η διάταξη δεν είναι απαραίτητη. Στο επόμενο κεφάλαιο θα απορρίψουμε την αρχή αυτή, οπότε θα πάψουμε να χρησιμοποιούμε και την διάταξη.

Οι προτάσεις του παραπάνω συνόλου είναι αρκετές για την πλήρη περιγραφή της γνώσης μας και είναι το μοναδικό στοιχείο που χρειάζεται να αποθηκεύσουμε. Παραγόμενες πεποιθήσεις, οι πιθανοί κόσμοι για τους οποίους μιλήσαμε παραπάνω, καθώς και η διάταξη μεταξύ ερμηνειών την οποία απαιτήσαμε στην προηγούμενη ενότητα μπορούν να προκύπτουν όποτε χρειάζονται. Θα δούμε ότι η μέθοδός μας στην πραγματικότητα αποθηκεύει με ένα κωδικοποιημένο τρόπο τις ενημερώσεις όλες μαζί και όχι κάθε μία χωριστά. Επίσης, πληροφορία που δεν έχει ρητώς καταχωρηθεί (για παράδειγμα οι πιθανοί κόσμοι και η διάταξή τους) προκύπτει αρκετά εύκολα με την χρήση της κωδικοποίησης αυτής.

3.4 Δείκτης Αξιοπιστίας

Είδαμε ότι ένα από τα βασικά προβλήματα στην αναθεώρηση πεποιθήσεων είναι η επιλογή της πληροφορίας προς απόρριψη όπου αυτό είναι απαραίτητο. Εν γένει στην βιβλιογραφία, η εισερχόμενη πληροφορία (ενημέρωση) θεωρείται σωστή, επομένως η προσπάθειά μας πρέπει να επικεντρωθεί στην αναζήτηση προτάσεων προς απόρριψη από την ίδια την βάση γνώσης. Η απόλυτη εμπιστοσύνη στην νέα πληροφορία γίνεται με το επιχείρημα ότι η νέα πληροφορία είναι η τελευταία γνώση που έχουμε για τον κόσμο, άρα μπορεί να θεωρηθεί σωστή. Αυτή την μέθοδο χρησιμοποιούν όλοι οι αλγόριθμοι που ακολουθούν τα αξιώματα AGM και τις αρχές του Dalal.

Εύκολα όμως μπορεί κανείς να σκεφτεί περιπτώσεις όπου αυτό δεν είναι σωστό. Η νέα πληροφορία μπορεί να προέρχεται από αναξιόπιστη πηγή. Μπορεί επίσης να αντιφάσκει με πεποιθήσεις τις οποίες θεωρούμε απόλυτα σωστές και αυθεντικές (για παράδειγμα περιορισμούς ακεραιότητας) ή μπορεί να μας υποχρεώνει να αναιρέσουμε ένα μεγάλο ποσοστό από την γνώση μας. Από την άλλη, η αντίστροφη πολιτική, δηλαδή η απόρριψη της ενημέρωσης κάθε φορά που αυτή είναι αντιφατική, είναι επίσης λανθασμένη. Με αυτή την πολιτική, μία λανθασμένη ενημέρωση, από την στιγμή που θα γίνει αποδεκτή, δεν θα μπορεί με κανένα τρόπο να απορριφθεί από την βάση αν εκ των υστέρων ανακαλύψουμε το λάθος μας.

Τα παραπάνω δείχνουν ότι πρέπει να ακολουθηθεί μία ενδιάμεση πολιτική, με βάση την οποία θα κρίνουμε την ενημέρωση και θα αποφασίζουμε για την αποδοχή ή την απόρριψή της κατά περίπτωση. Στην εργασία [4] βλέπουμε μία εφαρμογή της ενδιάμεσης αυτής πολιτικής από τον πράκτορα που αντιπροσωπεύει την βάση γνώσης μας. Είναι σαφές ότι ένα από τα βασικά κριτήρια για την απόφασή μας θα πρέπει να είναι η αξιοπιστία της πηγής πληροφορίας που μας παρείχε την ενημέρωση. Πρέπει λοιπόν με κάποιο τρόπο να μπορούμε να μετρήσουμε την αξιοπιστία κάθε πεποίθησης, ορίζοντας κάποιο μέτρο, το οποίο θα ονομάζουμε *δείκτη αξιοπιστίας* (Reliability Factor) και θα συμβολίζουμε με RF. Προκειμένου να έχει ο δείκτης αξιοπιστίας διαισθητικό νόημα, θα απαιτήσουμε η αξιοπιστία μίας πληροφορίας να είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, δηλαδή RF>0. Αντίστοιχα, αν θέλουμε να υποδηλώσουμε την απώλεια εμπιστοσύνης σε κάποια πρόταση (πράξεις αφαίρεσης και διαγραφής) τότε μπορούμε να θέτουμε και αρνητικές τιμές στον δείκτη αξιοπιστίας. Σε κάθε περίπτωση η αξιοπιστία μίας πρότασης θα είναι η απόλυτη τιμή του δείκτη αξιοπιστίας, ενώ το πρόσημο θα δηλώνει αν πρόκειται για ενημέρωση η οποία προσθέτει πληροφορία (διόρθωση, αναθεώρηση) ή για ενημέρωση η οποία αφαιρεί πληροφορία (διαγραφή, αφαίρεση).

Ο δείκτης αξιοπιστίας μπορεί να αντιπροσωπεύει διαφορετικά πράγματα, ανάλογα με την εφαρμογή. Αν ο συλλέκτης πληροφορίας είναι τα αισθητήρια όργανα ενός ρομπότ, τότε ο δείκτης RF αντιπροσωπεύει την πιθανότητα λάθους ή την ακρίβεια του κάθε οργάνου. Αν πρόκειται για μία βάση η οποία δέχεται πληροφορίες διαμέσου θορυβώδους καναλιού ή δικτύου, τότε ο δείκτης μπορεί να συμβολίζει την αξιοπιστία του κάθε καναλιού ή αποκωδικοποιημένου μηνύματος. Αν το σύστημά μας είναι μία πολυχρηστική βάση δεδομένων, τότε ο δείκτης θα μπορούσε να αντιπροσωπεύει την αξιοπιστία κάθε χρήστη ή τις δυνατότητες πρόσβασης και αλλαγής δεδομένων που του έχουν δοθεί από τον διαχειριστή της βάσης ([14]). Υπό αυτή την έννοια ο δείκτης αξιοπιστίας αποτελεί επιπλέον και μία δικλείδα ασφαλείας του συστήματος απέναντι σε κακοπροαίρετους χρήστες.

Είδαμε ότι ο δείκτης αξιοπιστίας αναφέρεται σε μία παρατήρηση ως αδιαίρετο κομμάτι. Θα ήταν ενδεχομένως επιθυμητό να μπορούμε να «σπάσουμε» κατά κάποιο

τρόπο μία παρατήρηση σε κομμάτια αναθέτωντας διαφορετικό δείκτη αξιοπιστίας σε κάθε κομμάτι, ή και σε κάθε άτομο χωριστά. Θα δούμε ότι η αναπαράσταση με πίνακες δίνει αυτή την δυνατότητα.

Με την χρήση του δείκτη αξιοπιστίας η επιλογή των πεποιθήσεων προς απόρριψη μπορεί να γίνεται με μία απλή σύγκριση. Εν γένει, η άρση μίας αντίφασης μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους, δηλαδή υπάρχουν πολλές επιλογές εκφράσεων ή τμημάτων εκφράσεων τα οποία αν απορριφθούν θα έχουμε άρση της αντίφασης. Με την χρήση του δείκτη RF μπορούμε να μετράμε την «απώλεια πληροφορίας» σε κάθε περίπτωση, η οποία θα είναι κάποια συνάρτηση των δεικτών αξιοπιστίας κάθε απορριφθήσας έκφρασης (ή μέρους έκφρασης), και να επιλέγουμε το σύνολο των εκφράσεων που προκαλεί την ελάχιστη απώλεια πληροφορίας. Ο τρόπος που ορίστηκε ο δείκτης αξιοπιστίας υποννοεί ότι αυτός αναφέρεται σε πεποιθήσεις οι οποίες δόθηκαν ως είσοδος (ενημέρωση) στην βάση μας. Θα πρέπει να οριστεί επομένως κάποια μέθοδος (συνάρτηση) με την χρήση της οποίας να μπορούμε να αναθέσουμε κάποιο μέτρο αξιοπιστίας σε μία τυχαία πρόταση, ώστε να μπορούμε να κάνουμε την σχετική σύγκριση. Η συνάρτηση αυτή αντιστοιχεί στην μετρική που ορίζουν οι Katsuno και Mendelzon ([20]).

Παρατηρούμε ότι στο σύνολο εκφράσεων προς απόρριψη μπορεί να ανήκει και η ενημέρωση (ή ένα τμήμα της) ή όχι. Άρα με την παραπάνω τεχνική έχουμε λύσει και το πρόβλημα της αποδοχής ή μη μίας αντιφατικής ενημέρωσης και το πρόβλημα της επιλογής του τμήματος της βάσης προς απόρριψη, αν η ενημέρωση γίνει τελικά αποδεκτή.

3.5 Πολλαπλές Ενημερώσεις

Η παραπάνω μέθοδος δουλεύει πολύ καλά όταν πρόκειται για μία βάση και μία ενημέρωση. Δυστυχώς όμως, για συγκεκριμένες ακολουθίες ενημερώσεων μπορεί να δώσει λάθος αποτελέσματα. Πάσχει δηλαδή από το πρόβλημα των πολλαπλών ενημερώσεων που περιγράψαμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Αυτό μπορεί να γίνει αντιληπτό με ένα παράδειγμα. Έστω ότι η βάση μας περιέχει – μεταξύ άλλων – την πληροφορία μ με αξιοπιστία Α. Αν λάβουμε μία ενημέρωση ¬μ, με δείκτη αξιοπιστίας Β, τότε προφανώς η ¬μ αντιφάσκει με την βάση. Αν υποθέσουμε ότι B<A, τότε η ενημέρωση δεν θα γίνει αποδεκτή με βάση τον παραπάνω αλγόριθμο απόρριψης ενημερώσεων. Αυτό είναι σωστό διαισθητικά, αφού η ¬μ έχει μικρότερη αξιοπιστία από την μ. Με το να απορρίψουμε την ενημέρωση ¬μ, αυτή είναι σαν να μην έγινε ποτέ. Σωστότερο θα ήταν η παρατήρηση ¬μ να κλονίσει με κάποιο τρόπο την πεποιθησή μας στο μ. Δηλαδή, παρόλο που θα εξακολουθήσουμε να πιστεύουμε στο μ, πρέπει πλέον η αξιοπιστία του να είναι μικρότερη από Α, έστω Α΄. Έτσι, αν αργότερα μας έρθει εκ νέου η παρατήρηση ¬μ

με κάποιον νέο δείκτη αξιοπιστίας Γ, θα πρέπει η σύγκριση να γίνει ως προς την νέα αξιοπιστία Α΄ και όχι ως προς την Α.

Μία εναλλακτική λύση είναι να κρατάμε στην βάση μας και την πληροφορία που απορρίπτεται. Εν γένει, μία αντίφαση δημιουργείται όταν έχουμε κάποιες παρατηρήσεις οι οποίες έπονται την γνώση μ και κάποιες οι οποίες έπονται την ¬μ. Μπορούμε με την βοήθεια του δείκτη αξιοπιστίας να υπολογίζουμε την «ένταση» με την οποία έπεται η μ και η ¬μ αντίστοιχα, η οποία θα είναι κάποια συνάρτηση της αξιοπιστίας των προτάσεων που δίνουν ως συνέπεια την μ και ¬μ αντίστοιχα.

Για να γίνει πιο εύκολη η παραπάνω μέθοδος, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μία αντίφαση οφείλεται στις επιμέρους αντιφάσεις οι οποίες προκύπτουν σε επίπεδο ατόμων, ανά πιθανό κόσμο. Με άλλα λόγια μία αντίφαση αποτελείται από ένα πλήθος επιμέρους αντιφάσεων για κάποια από τα άτομα που εμφανίζονται στην έκφραση μ. Τα άτομα στα οποία προκύπτουν οι αντιφάσεις αυτές (μπορεί να) είναι διαφορετικά ανά πιθανό κόσμο, όπως και η ένταση της αντίφασης και ο τρόπος άρσης της. Με άλλα λόγια, θα πρέπει να εξετάσουμε κάθε τέτοια αντίφαση ξεχωριστά, να βρούμε τον βέλτιστο τρόπο άρσης της – ανά πιθανό κόσμο – και να απορρίψουμε την κατάλληλη πληροφορία κάθε φορά.

3.6 Ενημερώσεις και Επερωτήσεις

Παρατηρούμε από την παραπάνω ανάλυση ότι τελικά κανένα κομμάτι πληροφορίας δεν απορρίπτεται από την βάση. Περιγράψαμε μία μέθοδο η οποία λύνει τις αντιφάσεις, αλλά τονίσαμε ότι οι προτάσεις που τελικά απορρίπτονται δεν διαγράφονται από την βάση. Αυτό υποννοεί ότι τελικά η άρση των αντιφάσεων δεν γίνεται κατά την διάρκεια της ενημέρωσης (όπου όλα είναι αποδεκτά), αλλά κατά τις επερωτήσεις. Η διαδικασία επομένως της ενημέρωσης απλοποιείται πάρα πολύ. Το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να προσθέσουμε την νέα παρατήρηση (με την αξιοπιστία της) στο σύνολο που αναπαριστά την γνώση μας.

Από την άλλη, η διαδικασία της επερώτησης περιπλέκεται. Προκειμένου να απαντηθεί μία ερώτηση του χρήστη πρέπει να βρεθούν οι αντιφάσεις και να αρθούν ώστε να έχουμε μία συνεπή βάση γνώσης. Στην συνέχεια, η επερώτηση πρέπει να εφαρμοστεί πάνω στην συνεπή βάση γνώσης που προέκυψε από την παραπάνω διαδικασία. Έτσι, λόγω και της νέας μορφής αναπαράστασης πληροφορίας, θα πρέπει να αναπτύξουμε έναν αλγόριθμο επερωτήσεων ο οποίος θα μετατρέπει τον πίνακα που προέκυψε ως αποτέλεσμα της ενημέρωσης σε κάποια συνεπή λογική βάση γνώσης, δηλαδή σε πληροφορία εκφρασμένη με λογικές προτάσεις, όπου είναι γνωστός ο τρόπος εκτέλεσης επερωτήσεων.

3.7 Ιδιότητες της Μεθόδου

Θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια πώς υλοποιούνται οι παραπάνω σκέψεις, οι οποίες οδήγησαν τελικά στον ορισμό και χρήση του μετασχηματισμού πινάκων. Πάντως, πριν ακόμα ορίσουμε τον μετασχηματισμό αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε κάποιες επιπλέον ιδιότητες της μεθόδου, όπως αυτή ορίστηκε σε γενικές γραμμές στο παρόν κεφάλαιο.

Καταρχήν, η αρχή προτεραιότητας ενημέρωσης του Dalal υποννοεί ότι οι νεώτερες παρατηρήσεις (ενημερώσεις) είναι πιο αξιόπιστες από τις παλαιότερες. Κάτω από το δικό μας πλαίσιο εργασίας, η αξιοπιστία κάθε ενημέρωσης εξαρτάται αποκλειστικά από τον δείκτη RF. Επομένως, η σειρά με την οποία έρχονται οι ενημερώσεις στην βάση μας είναι πλέον αδιάφορη. Αυτό είναι αρκετά σημαντικό, διότι η βάση γνώσης δεν είναι απαραίτητο να είναι διατεταγμένο σύνολο από πεποιθήσεις. Επίσης, η τεχνική που περιγράψαμε παραπάνω δείχνει ότι η πράξη της ενημέρωσης όπως ορίστηκε έχει την ιδιότητα της αντιμεταθετικότητας και της προσεταιριστικότητας, αφού η ενημέρωση είναι η απλή καταγραφή των ενημερώσεων που έρχονται στην βάση.

Αυτό είναι αρκετά επιθυμητό, αφού το αποτέλεσμα μίας ακολουθίας ενημερώσεων δεν είναι λογικό να εξαρτάται από την χρονική σειρά των παρατηρήσεων (ενημερώσεων). Επίσης δείχνει ότι κάθε παρατήρηση χωριστά μπορεί να θεωρηθεί σαν μία μικρή βάση γνώσης από μόνη της, άρα η ενημέρωση αποτελεί στην ουσία την ένωση της πληροφορίας που υπάρχει σε δύο βάσεις γνώσης. Έτσι, λύνεται ταυτόχρονα και το πρόβλημα της συγχώνευσης βάσεων γνώσεων (knowledge base merging).

Σχετικά με το πρόβλημα της ισοδυναμίας βάσεων γνώσεων, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, λόγω των αντιφάσεων και του τρόπου αποθήκευσης της γνώσης, δύο διαφορετικές βάσεις γνώσης μπορεί να δώσουν σαν αποτέλεσμα την ίδια λογική βάση προς χρήση σε επερωτήσεις. Έτσι, δύο φαινομενικά ισοδύναμες βάσεις γνώσης, οι οποίες δίνουν τις ίδιες ακριβώς απαντήσεις σε οποιαδήποτε επερώτηση, μπορεί και να μην είναι ισοδύναμες, γιατί ενδέχεται να προέρχονται από διαφορετικά σύνολα ενημερώσεων (δηλαδή διαφορετικές βάσεις). Το γεγονός ότι πρόκειται για διαφορετικές βάσεις αυτόματα συνεπάγεται ότι οποιαδήποτε μελλοντική ενημέρωση μπορεί να δώσει σαν αποτέλεσμα βάσεις που να αντιστοιχούν σε διαφορετική γνώση, οπότε δεν θα έχουμε πλέον τις ίδιες απαντήσεις στα ερωτήματα του χρήστη.

Από την άλλη, δύο ίδια σύνολα ενημερώσεων δεν μπορούν παρά να δώσουν τις ίδιες απαντήσεις σε κάθε συγκεκριμένη επερώτηση. Επίσης, μετά από κάθε τυχαία ενημέρωση θα έχουμε και πάλι το ίδιο αποτέλεσμα. Έτσι, μέσα στο σύνολο που αναπαριστά την βάση γνώσης έχουμε αποθηκεύσει τόσο την πληροφορία σχετικά με την τρέχουσα γνώση (τι θα απαντήσουμε σε κάθε επερώτηση), όσο και την

πληροφορία σχετικά με την κάθε μελλοντική ενημέρωση (πώς θα γίνει η επόμενη ενημέρωση). Έτσι, σύμφωνα και με την εργασία [10], η μέθοδός μας υποστηρίζει πολλαπλές ενημερώσεις.

Οι περιορισμοί ακεραιότητας (integrity constraints) με βάση το μοντέλο μας δεν είναι τίποτα περισσότερο από κάποιες λογικές προτάσεις οι οποίες πρέπει να ισχύουν στην βάση. Για να πετύχουμε την απόρριψη οποιασδήποτε ενημέρωσης αντιφάσκει με τους περιορισμούς αυτούς, το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να θέσουμε στις προτάσεις αυτές πολύ υψηλή αξιοπιστία. Οι περιορισμοί ακεραιότητας μπορούν να εισαχθούν στην βάση σαν προϋπάρχουσα γνώση κατά την αρχικοποίηση, ή να προστεθούν εκ των υστέρων, οπότε θα γίνει αυτόματα και η αναπροσαρμογή της βάσης ώστε να πληρούνται οι νέοι περιορισμοί.

Κεφάλαιο 4: Μετασχηματισμός Πινάκων

4.1 Λογική και Μιγαδικοί Αριθμοί

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η βασικότερη έννοια πάνω στην οποία βασίζεται η τεχνική μας είναι η έννοια του δείκτη αξιοπιστίας. Ο δείκτης αξιοπιστίας είναι ένας πραγματικός αριθμός (πιθανά αρνητικός, για να καλύψουμε την περίπτωση ενημερώσεων που αφαιρούν πληροφορία), ο οποίος ανατίθεται σε κάθε άτομο της πρότασης που αναπαριστά την ενημέρωση. Απαιτήσαμε, για λόγους γενικότητας, να υπάρχει η δυνατότητα η ποσότητα αυτή να είναι διαφορετική ανά άτομο.

Κάναμε επίσης την παραδοχή ότι ο κόσμος μας αντιπροσωπεύεται από μία ερμηνεία, έστω την W, επομένως μπορεί να περιγραφεί πλήρως από μία σύζευξη ατόμων και αρνήσεων ατόμων, στην οποία θα εμφανίζονται όλα τα άτομα της γλώσσας (τα οποία όπως είπαμε είναι πεπερασμένου πλήθους). Έτσι, μία διάζευξη σε μία ενημέρωση ή στην βάση, υποννοεί αδυναμία απόφασης ως προς το ποιός από τους κόσμους που αντιπροσωπεύει κάθε μέλος της διάζευξης είναι ο σωστός. Το ίδιο υποννοείται εμμέσως από την απουσία κάποιου ατόμου σε μία ενημέρωση ή στην βάση (ή σε ένα πιθανό κόσμο της βάσης ή της ενημέρωσης). Τελικά δηλαδή κάθε μέλος κάθε διάζευξης είναι ένας ξεχωριστός πιθανός κόσμος.

Με την βοήθεια της παραπάνω ανάλυσης, μπορούμε πλέον να θεωρήσουμε ότι ένας πιθανός κόσμος είναι μία σύζευξη ενός πεπερασμένου πλήθους ατόμων (ή αρνήσεων ατόμων), συνεπώς μία αντίφαση σε ένα πιθανό κόσμο οφείλεται στην ταυτόχρονη εμφάνιση ενός (τουλάχιστον) ατόμου και της άρνησής του. Για να μπορέσουμε να μετρήσουμε την ένταση της αντίφασης, πρέπει να γνωρίζουμε την ένταση (αξιοπιστία) με την οποία εμφανίζεται το άτομο αυτό σαν κατάφαση, και την ένταση (αξιοπιστία) της άρνησής του. Επομένως, η εμφάνιση (ή μη) κάποιου ατόμου σε οποιοδήποτε πιθανό κόσμο περιγράφεται πλήρως από δύο πραγματικούς αριθμούς (x,y), εκ των οποίων ο πρώτος (x) περιγράφει την αξιοπιστία της κατάφασης του ατόμου και ο δεύτερος (y) περιγράφει την αξιοπιστία της άρνησης του ατόμου. Οι αριθμοί αυτοί μπορεί να είναι και ίσοι με το μηδέν, αν δεν εμφανίζεται καθόλου το εν λόγω άτομο ή αν εμφανίζεται μόνο ως άρνηση ή μόνο ως κατάφαση. Μπορούν επίσης να είναι και αρνητικοί, κάτι που υποδηλώνει δυσπιστία στην άρνηση ή κατάφαση του ατόμου αντίστοιχα.

Αντί να χρησιμοποιούμε ένα ζεύγος πραγματικών, δηλαδή έναν αριθμό του συνόλου $\mathbb{R}^2$, μπορούμε ισοδύναμα να θεωρήσουμε ότι το κάθε άτομο σε κάθε πιθανό κόσμο αντιπροσωπεύεται (περιγράφεται) από ένα μιγαδικό αριθμό $z\in\mathbb{C}$, τέτοιο ώστε Re(z)=x, Im(z)=y. Αυτή η απλή σκέψη θα βοηθήσει αρκετά στην θεωρητική θεμελίωση του μετασχηματισμού πινάκων.

4.2 Από τους Μιγαδικούς στους Πίνακες

Με την ανάθεση ενός μιγαδικού αριθμού σε κάθε άτομο κάθε πιθανού κόσμου μίας ενημέρωσης, έχουμε εμπλουτίσει τις εκφράσεις του προτασιακού λογισμού με την αξιοπιστία του κάθε ατόμου και της άρνησης του. Έτσι για παράδειγμα η πρόταση:

$P=(\alpha_1\wedge\alpha_2)\vee(\alpha_1\wedge\neg\alpha_3)$,

μπορεί πλέον να γραφεί:

$P'=(\alpha_1[2+0i]\wedge\alpha_2[5+0i])\vee(\alpha_1[1+0i]\wedge\alpha_3[0+3i])$,

όπου στην παραπάνω πρόταση έχουμε γράψει μέσα σε αγκύλες ([...]) την αξιοπιστία κάθε ατόμου υπό την επεκταμένη μορφή [x+yi]. Παρατηρήστε ότι στην έκφραση P′, το άτομο α_3 δεν εμφανίζεται ως άρνηση αλλά ως κατάφαση. Αυτό έγινε διότι η αξιοπιστία του είναι ένας φανταστικός αριθμός (3i), και το γεγονός ότι εμφανίζεται ως άρνηση υποννοείται από το γεγονός αυτό. Επιπλέον, θα μπορούσαμε να εμπλουτίσουμε περαιτέρω την P, γράφοντας την ως εξής:

$P''=(\alpha_1[2+0i]\wedge\alpha_2[5+0i]\wedge\alpha_3[0+0i])\vee(\alpha_1[1+0i]\wedge\alpha_2[0+0i]\wedge\alpha_3[0+3i])$,

όπου στην P′′ έχουμε τοποθετήσει και άτομα τα οποία δεν εμφανίζονται στην αρχική έκφραση, αλλά με αξιοπιστία ίση με το μηδέν, κάτι το οποίο υποδηλώνει την μη εμφάνισή τους, ή ισοδύναμα την απόλυτη άγνοια σχετικά με την αληθοτιμή τους στον πραγματικό κόσμο.

Συνεχίζοντας το παραπάνω παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η υποκείμενη γλώσσα L περιέχει μόνο τα 3 άτομα: α_1, α_2, α_3. Η πρόταση P (ή ισοδύναμα η P′ ή ισοδύναμα η P′′), περιέχει δύο πιθανούς κόσμους, τους οποίους ονομάζουμε P_1 και P_2. Με την βοήθεια της έκφρασης P′′, μπορούμε να περιγράψουμε με μεγαλύτερη συμπάγεια την γνώση μας χρησιμοποιώντας τον παρακάτω πίνακα:

Κόσμοι/Άτομα	α_1	α_2	α_3
P_1	2+0i	5+0i	0+0i
P_2	1+0i	0+0i	0+3i

Στον πίνακα αυτόν, εμφανίζονται όλα τα άτομα, για κάθε πιθανό κόσμο, μαζί με την αξιοπιστία του ίδιου του ατόμου (κατάφαση) και της άρνησής του. Άρα

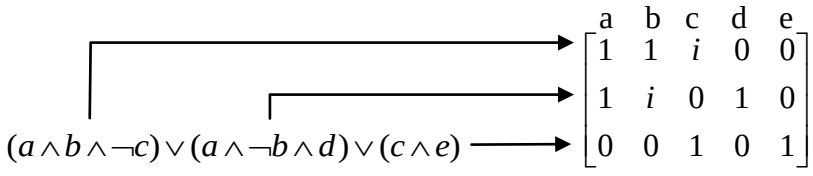
λοιπόν, ο παραπάνω πίνακας εμπεριέχει όλη την πληροφορία της πρότασης P, εμπλουτισμένη με την σχετική με την αξιοπιστία πληροφορία που διαθέτουμε. Αν η γλώσσα είχε και άλλα άτομα – το άτομο α_4 για παράδειγμα – τότε θα έπρεπε να προσθέσουμε κολώνες στον πίνακα, θέτοντας την αξιοπιστία των επιπλέον ατόμων ίση με το 0 και για τους δύο πιθανούς κόσμους.

Μετά την παραπάνω αναπαράσταση, είναι πλέον άμεση η μετάβαση από την λογική στους πίνακες. Έτσι, ο αντίστοιχος πίνακας της πρότασης P, για τις αξιοπιστίες που ορίσαμε αυθαίρετα παραπάνω και για την γλώσσα L είναι ο πίνακας:

$$\begin{bmatrix} 2+0i & 5+0i & 0+0i \\ 1+0i & 0+0i & 0+3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3i \end{bmatrix}$$

Κατά την προηγούμενη ανάλυση υποθέσαμε ότι μία λογική πρόταση είναι χωρισμένη σε πιθανούς κόσμους, μέσω της πράξης της διάζευξης, ενώ κάθε πιθανός κόσμος είναι η σύζευξη ατόμων ή αρνήσεων ατόμων. Είναι προφανές ότι δεν έχουν όλες οι λογικές προτάσεις αυτή την μορφή. Για παράδειγμα η πρόταση: $\alpha_1 \wedge (\alpha_1 \vee \neg\alpha_3) \in L^*$ δεν είναι αυτής της μορφής, ούτε η $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \in L^*$. Για την ακρίβεια, μόνο οι προτάσεις που είναι σε κανονική διαζευκτική μορφή (DNF) έχουν αυτή την ιδιότητα. Εντούτοις, όλες οι λογικές προτάσεις έχουν μία ισοδύναμη έκφραση σε DNF, επομένως η απαίτηση να είναι η λογική μας πρόταση σε DNF δεν είναι περιοριστική. Άλλωστε, μετά την αυστηρή θεωρητική θεμελίωση του μετασχηματισμού θα δούμε ότι αυτός εφαρμόζεται σε οποιαδήποτε λογική πρόταση, ανεξαρτήτως μορφής.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, έστω μία γλώσσα L με n άτομα, έστω δηλαδή $L=\{a_1,a_2,\ldots,a_n,T,F,(,),\wedge,\vee,\neg,\rightarrow,\leftrightarrow\}$. Έστω επιπλέον μία λογική πρόταση $p \in L^*$, η οποία είναι σε DNF. Για να κατασκευάσουμε τον αντίστοιχο πίνακα της p, δημιουργούμε ένα πίνακα από μιγαδικούς αριθμούς ο οποίος έχει n στήλες και τόσες γραμμές όσοι είναι οι διαζευκτικοί όροι της DNF έκφρασης. Στην συνέχεια, αντιστοιχούμε ένα γράμμα (literal) σε κάθε στήλη και έναν διαζευκτικό όρο σε κάθε γραμμή του πίνακα. Τέλος, το κάθε στοιχείο z_{jk} του πίνακα είναι ίσο με 1 αν το γράμμα που αντιστοιχεί στην στήλη k εμφανίζεται σαν κατάφαση στον διαζευκτικό όρο j, ίσο με i αν το γράμμα αυτό εμφανίζεται ως άρνηση και ίσο με 0 αν το γράμμα δεν εμφανίζεται καθόλου. Αν εκτός από την πρόταση p διαθέτουμε και πληροφορία σχετική με τις αξιοπιστίες των διαφόρων ατόμων, τότε αντί για 1 και i χρησιμοποιούμε την αντίστοιχη (γνωστή) αξιοπιστία. Ένα παράδειγμα εφαρμογής του μετασχηματισμού φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, όπου χρησιμοποιήσαμε τις προκαθορισμένες τιμές 1 και i για την αξιοπιστία του κάθε ατόμου και μία γλώσσα 5 ατόμων (a,b,c,d,e):



Παράδειγμα Εφαρμογής του Μετασχηματισμού

Στις παρακάτω ενότητες θα θεμελιώσουμε θεωρητικά την μέθοδό μας, θα ορίσουμε με αυστηρό τρόπο τον μετασχηματισμό και θα αποδείξουμε διάφορα αποτελέσματα και ιδιότητές του. Όπως θα δούμε στο παράρτημα Α, η παραπάνω τεχνική δεν είναι ο μοναδικός πιθανός τρόπος ορισμού του μετασχηματισμού. Επίσης, θα δούμε πως μπορούμε να μεταφέρουμε τις γνωστές έννοιες του προτασιακού λογισμού (άτομα, ερμηνείες, ικανοποιησιμότητα κα) ώστε να αναφέρονται σε πίνακες. Η σύνδεση με το πρόβλημα της αναθεώρησης πεποιθήσεων θα γίνει στο επόμενο κεφάλαιο.

4.3 Βασικοί Ορισμοί

Καταρχήν θα ορίσουμε κάποιους βασικούς συμβολισμούς. Θα συμβολίζουμε – κατά τα γνωστά – με $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών, $\mathbb{R}^{(+)}$ το σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών, i την φανταστική μονάδα ($i=\sqrt{-1}$) και $\mathbb{C}$ το σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Επίσης θα χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα $\mathbb{N}$ για τους φυσικούς και $\mathbb{N}^*$ για τους φυσικούς εκτός από το 0. Επιπλέον, ορίζουμε: $\mathbb{C}^{(+)}=\{x+yi\in\mathbb{C}|x,y\in\mathbb{R}^{(+)}\}$, το σύνολο δηλαδή των μιγαδικών αριθμών με μη αρνητικό πραγματικό και φανταστικό μέρος.

Επεκτείνοντας τους συμβολισμούς στους πίνακες, συμβολίζουμε με $\mathbb{C}^{m\times n}$ το σύνολο των πινάκων με m γραμμές και n στήλες, των οποίων τα στοιχεία είναι μιγαδικοί αριθμοί. Κατ' αναλογία ορίζουμε τα σύνολα πινάκων: $\mathbb{C}^{(+)m\times n}$, $\mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbb{R}^{(+)m\times n}$. Επιπλέον ορίζουμε $\mathbb{C}^{*\times n}$ το σύνολο των πινάκων με n στήλες, ανεξαρτήτως πλήθους γραμμών, δηλαδή: $\mathbb{C}^{*\times n}=\{A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ για κάποιο $m\in\mathbb{N}^*\}$. Κατ' αναλογία ορίζονται επίσης τα σύνολα: $\mathbb{C}^{(+)*\times n}$, $\mathbb{R}^{*\times n}$, $\mathbb{R}^{(+)*\times n}$.

Επίσης, θα χρειαστούμε τις κλασικές πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού πινάκων καθώς και τον πολλαπλασιασμό αριθμού με πίνακα όπως αυτές ορίζονται στην κλασική θεωρία πινάκων. Επιπλέον, ορίζουμε την πράξη της παράθεσης (juxtaposition) πινάκων ως εξής:

Ορισμός 4.1

Έστω πίνακες $A,B\in\mathbb{C}^{*\times n}$. Η παράθεση των Α και Β συμβολίζεται με Α|Β και είναι ο πίνακας που προκύπτει τοποθετώντας τις γραμμές του Α ακολουθούμενες από τις

γραμμές του B, δηλαδή:

$$A \mid B = \begin{bmatrix} A \\ --- \\ B \end{bmatrix}.$$

Επίσης, ορίζουμε μία διαμέριση του συνόλου των μιγαδικών ως εξής:

Ορισμός 4.2

Ορίζουμε τα εξής σύνολα:

- $\mathbb{C}_+=\{z\in\mathbb{C}|Re(z)\geq 0, Im(z)\leq 0\}$
- $\mathbb{C}_-=\{z\in\mathbb{C}|Re(z)\leq 0, Im(z)\geq 0\}$
- $\mathbb{C}_*=\{z\in\mathbb{C}|Re(z)\cdot Im(z)>0\}$
- $\mathbb{C}_0=\{z\in\mathbb{C}|Re(z)=Im(z)=0\}$

Έστω $z\in\mathbb{C}$. Θα ονομάζουμε τον z:

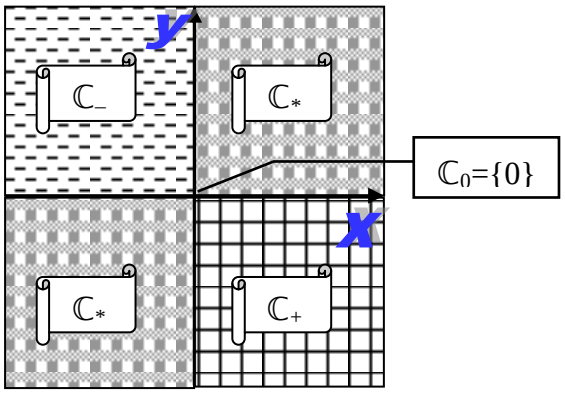
- *θετικό* ανν $z\in\mathbb{C}_+$
- *αρνητικό* ανν $z\in\mathbb{C}_-$
- *αντιφατικό* ανν $z\in\mathbb{C}_*$
- *μηδενικό* ανν $z\in\mathbb{C}_0$

Τα παραπάνω σύνολα έχουν τις εξής προφανείς ιδιότητες:

$\mathbb{C}_0=\{0\}$, $\mathbb{C}_+\cap\mathbb{C}_-=\mathbb{C}_0$, $\mathbb{C}_+\cap\mathbb{C}_*=\varnothing$, $\mathbb{C}_-\cap\mathbb{C}_*=\varnothing$, $\mathbb{C}_-\cup\mathbb{C}_+\cup\mathbb{C}_*=\mathbb{C}$, $\mathbb{C}_*=\mathbb{C}\setminus(\mathbb{C}_+\cup\mathbb{C}_-)$.

Παρατηρούμε, μεταξύ άλλων, ότι ένας μηδενικός αριθμός είναι ταυτόχρονα θετικός και αρνητικός, ενώ ένας αντιφατικός δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το μιγαδικό επίπεδο, και η γεωμετρική ερμηνεία των παραπάνω συνόλων:



Όπως θα φανεί κατά τον ορισμό των ερμηνειών του χώρου των πινάκων, οι αριθμοί που ανήκουν στο σύνολο $\mathbb{C}_+$ υποδηλώνουν την ύπαρξη ενός θετικού ατόμου

στον αντίστοιχο πιθανό κόσμο (αληθοτιμή true). Αντίστοιχα, αριθμοί του $\mathbb{C}_-$ υποδηλώνουν την ύπαρξη άρνησης ατόμου (αληθοτιμή false), ενώ αντιφατικοί αριθμοί ($\mathbb{C}_*$) υποδηλώνουν την ταυτόχρονη ύπαρξη ενός ατόμου και της άρνησής του, δηλαδή αντίφαση. Τέλος, ο αριθμός $0\in\mathbb{C}_0$ υποδηλώνει την έλλειψη γνώσης σχετικά με το εν λόγω άτομο (ή την άρνησή του), άρα την προθυμία αποδοχής οποιασδήποτε αληθοτιμής. Αυτό φάνηκε και από τον τρόπο ορισμού του μετασχηματισμού πινάκων στην παραπάνω ενότητα. Έτσι για παράδειγμα ο αριθμός: $-3+5i\in\mathbb{C}_-$, υποδηλώνει πίστη στην άρνηση του ατόμου ($\neg\alpha$) με ένταση 5 και δυσπιστία στην κατάφαση του ατόμου με ένταση 3, επομένως έμμεσα υποδηλώνει πίστη στην άρνηση του α ($\neg\alpha$).

Οι παρακάτω πίνακες θα φανούν αρκετά χρήσιμοι στην συνέχεια:

Ορισμός 4.3

- Για κάθε $k\in\mathbb{N}^*$, $k\le n$ ορίζουμε τον πίνακα $A_k=[0\ \dots\ 0\ \ 1\ \ 0\ \dots\ 0]$, όπου το στοιχείο 1 βρίσκεται στην k-στη κολώνα. Ο πίνακας αυτός ονομάζεται *θετικό k-άτομο* (*positive k-atom*) ή απλά *k-άτομο* (*k-atom*).
- Για κάθε $k\in\mathbb{N}^*$, $k\le n$, και για κάθε $z\in\mathbb{C}$, ορίζουμε τον πίνακα $A_k(z)=z\cdot A_k$. Ο πίνακας αυτός ονομάζεται *γενικευμένο k-άτομο* (*generalized k-atom*). Στην ειδική περίπτωση όπου z=i, ο πίνακας $A_k(i)$ θα ονομάζεται *αντίστροφο k-άτομο* (*inverse k-atom*).
- Ο πίνακας $T_n=[0\ \ 0\ \dots\ 0]$ ονομάζεται *πίνακας αληθείας τάξης n* (*n-true table*).
- Ο πίνακας $F_n=[1+i\ \ 1+i\ \dots\ 1+i]$ ονομάζεται *πίνακας ψεύδους τάξης n* (*n-false table*).

Είναι σαφές ότι ο πίνακας A_k αντιστοιχεί στο άτομο α_k, ενώ ο πίνακας $A_k(z)$, αντιστοιχεί στο άτομο α_k με δείκτη αξιοπιστίας z. Ο δείκτης αξιοπιστίας μπορεί να συμπεριλαμβάνει αρνητική αξιοπιστία (z=–3), αξιοπιστία που αντιστοιχεί σε άρνηση ατόμου (z=2i), αντιφατική αξιοπιστία (z=3+5i) ή οποιοδήποτε άλλο συνδυασμό των παραπάνω (z=4, z=–2+3i, z=7–4i, z=0, z=–2–4i κοκ). Ο πίνακας $T_n=A_k(0)$ αντιστοιχεί στην πλήρη έλλειψη πληροφορίας και θα αντιστοιχιστεί όπως θα δούμε στην λογική σταθερά T. Αντίστοιχα, ο πίνακας F_n αντιστοιχεί προφανώς σε κάποια αντιφατική λογική πρόταση και θα αντιστοιχιστεί στην λογική σταθερά F.

Με την βοήθεια των γενικευμένων ατόμων μπορούμε να ορίσουμε την *εκτεταμένη κανονική μορφή* (*extended normal form – ENF*) ενός πίνακα:

Πρόταση 4.1

Για κάθε πίνακα $A\in\mathbb{C}^{1\times n}$, υπάρχουν μοναδικά $z_j\in\mathbb{C}$, j=1,2,…,n, τέτοια ώστε: $A=\sum_{j=1}^{n}A_j(z_j)$.

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι άμεση επιλέγοντας κάθε z_j ίσο με το στοιχείο της j-στης κολώνας του A. Η μοναδικότητα προκύπτει από τον ορισμό των γενικευμένων ατόμων.

Πρόταση 4.2

Για κάθε $m\in\mathbb{N}^*$ και κάθε πίνακα $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, υπάρχουν μοναδικά $z_{kj}\in\mathbb{C}$, k=1,2,…,m, j=1,2,…,n, τέτοια ώστε: $A=(\sum_{j=1}^{n}A_j(z_{1j}))\,|\,(\sum_{j=1}^{n}A_j(z_{2j}))\,|\,...\,|\,(\sum_{j=1}^{n}A_j(z_{mj}))$.

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι και πάλι άμεση επιλέγοντας κάθε z_{kj} ίσο με το στοιχείο της k-στης γραμμής και j-στης κολώνας του A. Η μοναδικότητα προκύπτει από τον ορισμό των γενικευμένων ατόμων.

Η μορφή ενός πίνακα όπως στην πρόταση 4.2 ονομάζεται εκτεταμένη κανονική μορφή του A και συμβολίζεται με ENF(A). Η μορφή αυτή δίνει έναν πίνακα σαν συνάρτηση γενικευμένων ατόμων και θα μας χρειαστεί για να συνδέσουμε τους πίνακες με λογικές εκφράσεις.

4.4 Ερμηνείες

Έχοντας τους παραπάνω βασικούς ορισμούς, θα επιχειρήσουμε να εκφράσουμε τις ερμηνείες του προτασιακού λογισμού και την έννοια της ικανοποιησιμότητας στο σύνολο των πινάκων. Στην λογική, μία ερμηνεία είναι μία ανάθεση λογικών τιμών (T,F) σε όλα τα άτομα της γλώσσας. Αν αναθέσουμε την λογική τιμή F στην αριθμητική σταθερά 0 και την λογική τιμή T στην αριθμητική σταθερά 1, και επιπλέον καθορίσουμε την σειρά των ατόμων της γλώσσας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μία ερμηνεία του προτασιακού λογισμού, για γλώσσα με πεπερασμένο πλήθος ατόμων (έστω n) είναι μία διατεταγμένη n-άδα από στοιχεία του συνόλου {0,1}. Θα ορίσουμε με τον ίδιο τρόπο και τις ερμηνείες στους πίνακες ώστε το σύνολο ερμηνειών που ικανοποιεί μία πρόταση να είναι συγκρίσιμο με το σύνολο ερμηνειών που ικανοποιεί (με τον τρόπο που θα ορίσουμε) έναν πίνακα. Έτσι έχουμε:

Ορισμός 4.4

Ορίζουμε τις σταθερές: $F=0\in\mathbb{C}$, και $T=1\in\mathbb{C}$.

Κάθε διατεταγμένη n-αδα αριθμών του συνόλου {0,1}={F,T} ονομάζεται *ερμηνεία* (*interpretation*) του χώρου $\mathbb{C}^{*\times n}$. Θα συμβολίζουμε με I(n) το σύνολο των ερμηνειών του χώρου $\mathbb{C}^{*\times n}$.

Όπως είπαμε και παραπάνω, οι λογικές ερμηνείες είναι επίσης διατεταγμένες n-άδες στοιχείων του συνόλου {0,1}, οπότε μία ερμηνεία του χώρου $\mathbb{C}^{*\times n}$ μπορεί να θεωρηθεί και λογική ερμηνεία και αντίστροφα. Επίσης ορίζουμε πίνακες-ερμηνείες:

Ορισμός 4.5

Έστω ερμηνεία $I=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in I(n)$ και $A\in\mathbb{C}^{1\times n}$ ο πίνακας:

$A=\sum_{j=1}^{n} A_j(x_j+(1-x_j)\cdot i)$. Ο πίνακας Α ονομάζεται *πίνακας-ερμηνεία* (*interpretation matrix*) του χώρου $\mathbb{C}^{*\times n}$. Επίσης, ο πίνακας Α ονομάζεται *αντίστοιχος πίνακας της ερμηνείας I* και η ερμηνεία I *αντίστοιχη ερμηνεία του πίνακα A*.

Είναι σαφές ότι υπάρχει μία 1-1 και επί σχέση μεταξύ ερμηνειών και πινάκων-ερμηνειών. Από αυτή την σχέση προκύπτει και η έννοια της αντιστοίχης ερμηνείας (και αντίστοιχου πίνακα-ερμηνείας). Πολλές φορές θα χρησιμοποιούμε τον όρο ερμηνεία για τους πίνακες-ερμηνείες όπου δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης.

Δεδομένου ότι $x_j\in\{0,1\}$ $\forall j\in\{1,2,\ldots,n\}$ έπεται ότι $z=x_j+(1-x_j)\cdot i\in\{1,i\}$ και μάλιστα: $x_j=0\Leftrightarrow z=i$, $x_j=1\Leftrightarrow z=1$. Συνεπώς, ένας πίνακας-ερμηνεία είναι ένας πίνακας του χώρου $\mathbb{C}^{1\times n}$, του οποίου τα στοιχεία ανήκουν στο σύνολο {1,i}.

Η ικανοποιησιμότητα ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 4.6

Έστω ερμηνεία $I=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in I(n)$ και $A\in\mathbb{C}^{1\times n}$. Θα λέμε ότι *ο πίνακας A ικανοποιείται από την ερμηνεία I* ανν:

$\exists z_1,z_2,\ldots,z_n\in C^{(+)}: A=\sum_{j=1}^{n}[A_j((2\cdot x_j-1)\cdot\overline{z_j})]$, όπου $\overline{z_j}$ ο συζυγής μιγαδικός του z_j.

Εν γένει, αν $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, για κάποιο $m\in\mathbb{N}^*$, και $A=A^{(1)}|A^{(2)}|\ldots|A^{(m)}$, $A^{(j)}\in\mathbb{C}^{1\times n}$, $j\in\{1,2,\ldots,m\}$, τότε λέμε ότι ο πίνακας Α ικανοποιείται από την ερμηνεία I ανν $\exists j\in\{1,2,\ldots,m\}$: ο πίνακας $A^{(j)}$ ικανοποιείται από την ερμηνεία I.

Το σύνολο των ερμηνειών που ικανοποιούν έναν πίνακα Α θα ονομάζεται το *σύνολο των μοντέλων* (*set of models*) του Α ή πιο απλά *μοντέλο* (*model*) του Α, και θα συμβολίζεται με mod(A).

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα $(2\cdot x_j-1)\in\{1,-1\}$, αφού $x_j\in\{0,1\}$ και μάλιστα $x_j=0\Leftrightarrow 2\cdot x_j-1=-1$, $x_j=1\Leftrightarrow 2\cdot x_j-1=1$. Επομένως, η ποσότητα $w_j=(2\cdot x_j-1)\cdot \overline{z_j}$, δεδομένου ότι $z_j\in\mathbb{C}^{(+)}$, έχει την ιδιότητα:

- $x_j=0\Leftrightarrow \mathrm{Re}(w_j)\le 0$ και $\mathrm{Im}(w_j)\ge 0\Leftrightarrow w_j\in\mathbb{C}_-$
- $x_j=1\Leftrightarrow \mathrm{Re}(w_j)\ge 0$ και $\mathrm{Im}(w_j)\le 0\Leftrightarrow w_j\in\mathbb{C}_+$

Η ιδιότητα αυτή αποτελεί την πρώτη ένδειξη για την ισχύ της πρότασης 4.4 παρακάτω.

Ορισμός 4.7

Έστω πίνακας $A\in\mathbb{C}^{*\times n}$.

Αν $\mathrm{mod}(A)=I(n)$, τότε ο A ονομάζεται *ταυτολογία* (*tautology*).

Αν $\mathrm{mod}(A)=\varnothing$, τότε ο A ονομάζεται *αντινομία* (*antinomy*).

Ορισμός 4.8

Έστω $A,B\in\mathbb{C}^{*\times n}$. Οι πίνακες A,B ονομάζονται *ισοδύναμοι* (*equivalent*) ανν $\mathrm{mod}(A)=\mathrm{mod}(B)$. Θα συμβολίζουμε τους ισοδύναμους πίνακες με το σύμβολο $\cong$, δηλαδή: $A\cong B\Leftrightarrow \mathrm{mod}(A)=\mathrm{mod}(B)$.

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι:

Πρόταση 4.3

Η σχέση $\cong$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Απόδειξη

Είναι προφανές ότι $\forall A,B,C\in\mathbb{C}^{*\times n}$:

$\mathrm{mod}(A)=\mathrm{mod}(A)\Rightarrow A\cong A$,

$A\cong B\Rightarrow \mathrm{mod}(A)=\mathrm{mod}(B)\Rightarrow \mathrm{mod}(B)=\mathrm{mod}(A)\Rightarrow B\cong A$,

$(A\cong B)\wedge(B\cong C)\Rightarrow(\mathrm{mod}(A)=\mathrm{mod}(B))\wedge(\mathrm{mod}(B)=\mathrm{mod}(C))\Rightarrow \mathrm{mod}(A)=\mathrm{mod}(C)\Rightarrow A\cong C$.

Επομένως, η σχέση $\cong$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Πρόταση 4.4

Έστω $A=[w_1\ w_2\ \dots\ w_n]\in\mathbb{C}^{1\times n}$. Τότε $\mathrm{mod}(A)=I_1\times I_2\times\dots\times I_n$, όπου $\forall j\in\{1,2,\dots,n\}$ $I_j\subseteq\{0,1\}$ και:

- $0\in I_j$ ανν $w_j\in\mathbb{C}_-$
- $1\in I_j$ ανν $w_j\in\mathbb{C}_+$

Απόδειξη

Βλ. παράρτημα Α.

Η παραπάνω πρόταση είναι εξαιρετικά σημαντική για την συνέχεια. Μας δίνει ένα κατασκευαστικό τρόπο να υπολογίζουμε τα μοντέλα ενός πίνακα A, και επιπλέον μας λέει ότι το σύνολο μοντέλων του A έχει μία πολύ απλή μορφή, για $A \in \mathbb{C}^{1\times n}$. Επίσης, δείχνει ότι στο μοντέλο ενός πίνακα υπάρχει η ανάθεση T=1 αν και μόνο αν η αξιοπιστία του αντίστοιχου ατόμου είναι θετικός μιγαδικός αριθμός και υπάρχει η ανάθεση F=0 αν και μόνο αν η αξιοπιστία του αντίστοιχου ατόμου είναι αρνητικός μιγαδικός αριθμός. Αν η αξιοπιστία είναι αντιφατικός αριθμός τότε δεν υπάρχει καμία από τις αναθέσεις T,F (αντίφαση), ενώ αν είναι μηδενικός αριθμός υπάρχουν και οι δύο. Τέλος, έχει κάποια ενδιαφέροντα πορίσματα, των οποίων οι αποδείξεις είναι άμεσες:

Πόρισμα 4.1

Έστω $A=[w_1\ w_2\ \dots\ w_n] \in \mathbb{C}^{1\times n}$. Τότε ο A είναι αντινομία ανν $\exists j \in \{1,2,\dots,n\}: w_j \in \mathbb{C}_*$.

Το παρακάτω πόρισμα δίνει μία ισοδύναμη, αλλά μάλλον χρησιμότερη διατύπωση της πρότασης 4.4:

Πόρισμα 4.2

Έστω $A=[w_1\ w_2\ \dots\ w_n] \in \mathbb{C}^{1\times n}$. Τότε $mod(A)=I_1\times I_2\times\dots\times I_n$, όπου $\forall j \in \{1,2,\dots,n\}$:

- $I_j=\{0\}$ ανν $w_j \in \mathbb{C}_-\setminus\mathbb{C}_+$
- $I_j=\{1\}$ ανν $w_j \in \mathbb{C}_+\setminus\mathbb{C}_-$
- $I_j=\{0,1\}$ ανν $w_j \in \mathbb{C}_0$
- $I_j=\varnothing$ ανν $w_j \in \mathbb{C}_*$

Το πλήθος των ερμηνειών που ικανοποιούν τον $A \in \mathbb{C}^{1\times n}$ υπολογίζεται εύκολα με βάση το παρακάτω πόρισμα:

Πόρισμα 4.3

Έστω $A=[w_1\ w_2\ \dots\ w_n] \in \mathbb{C}^{1\times n}$. Αν ο A δεν είναι αντινομία, τότε $|mod(A)|=2^k$ όπου k το πλήθος των μηδενικών στοιχείων του A (το πλήθος των $w_j \in \mathbb{C}_0$).

Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε το σύνολο μοντέλων κάποιων βασικών πινάκων:

Πόρισμα 4.4

- Για κάθε $k \in \{1,2,\dots,n\}$, $mod(A_k)=I_1\times I_2\times\dots\times I_n$, όπου $I_j=\{0,1\}$, για $j \in \{1,2,\dots,n\}\setminus\{k\}$ και $I_k=\{1\}$

- Για κάθε $k\in\{1,2,\ldots,n\}$, $z\in\mathbb{C}$, $\mathrm{mod}(A_k(z))=I_1\times I_2\times\ldots\times I_n$, όπου $I_j=\{0,1\}$, για $j\in\{1,2,\ldots,n\}\backslash\{k\}$ και:
  - $I_k=\{0\}$ ανν $z\in\mathbb{C}_-\backslash\mathbb{C}_+$
  - $I_k=\{1\}$ ανν $z\in\mathbb{C}_+\backslash\mathbb{C}_-$
  - $I_k=\{0,1\}$ ανν $z\in\mathbb{C}_0$
  - $I_k=\varnothing$ ανν $z\in\mathbb{C}_*$
- $\mathrm{mod}(F_n)=\varnothing$
- $\mathrm{mod}(T_n)=I(n)$

Πόρισμα 4.5

Έστω $A=[w_1\ w_2\ \ldots\ w_n]\in\mathbb{C}^{1\times n}$. Ο A είναι ταυτολογία ανν $w_j\in\mathbb{C}_0\ \forall j\in\{1,2,\ldots,n\}$.

Από τον συνδυασμό των πορισμάτων 4.4, 4.5 συμπεραίνουμε ότι η μοναδική ταυτολογία του συνόλου $\mathbb{C}^{1\times n}$ είναι ο πίνακας $T_n\in\mathbb{C}^{1\times n}$.

Το παρακάτω πόρισμα δίνει μία κατασκευαστική μέθοδο υπολογισμού του συνόλου μοντέλων τυχαίου πίνακα $A\in\mathbb{C}^{*\times n}$. Η απόδειξη είναι προφανής με χρήση του ορισμού ικανοποιησιμότητας και της πρότασης 4.4:

Πόρισμα 4.6

Έστω $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, ώστε:

$$A=\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \ldots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \ldots & w_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{m1} & w_{m2} & \ldots & w_{mn} \end{bmatrix}$$

Τότε $\mathrm{mod}(A)=\bigcup_{j=1}^{m}(I_{j1}\times I_{j2}\times\ldots\times I_{jn})$, όπου $\forall j\in\{1,2,\ldots,m\}$, $k\in\{1,2,\ldots,n\}$:

- $0\in I_{jk}$ ανν $w_{jk}\in\mathbb{C}_-$
- $1\in I_{jk}$ ανν $w_{jk}\in\mathbb{C}_+$

Η παρακάτω πρόταση παρέχει μία δεύτερη χρήσιμη μέθοδο υπολογισμού των ερμηνειών που ικανοποιούν τον πίνακα $A\in\mathbb{C}^{*\times n}$:

Πρόταση 4.5

Έστω $m\in\mathbb{N}^*$ και $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$. Επιπλέον έστω ότι η ENF μορφή του A είναι:

$$A = (\sum_{j=1}^{n} A_j(z_{1j})) \,|\, (\sum_{j=1}^{n} A_j(z_{2j})) \,|\, \ldots \,|\, (\sum_{j=1}^{n} A_j(z_{mj})).$$

Τότε: $\mathrm{mod}(A) = \bigcup_{k=1}^{m} \bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{mod}(A_j(z_{kj}))$.

Απόδειξη

Βλ. παράρτημα Α.

Έχοντας την δυνατότητα υπολογισμού των μοντέλων ενός τυχαίου πίνακα, μπορούμε να ορίσουμε τον χώρο πηλίκο του συνόλου των πινάκων ως προς την σχέση ισοδυναμίας ≅:

Ορισμός 4.9

Θα συμβολίζουμε τον χώρο πηλίκο του $\mathbb{C}^{*\times n}$ ως προς την σχέση ≅ με το σύμβολο: $\mathbb{C}^{*\times n/\cong} \equiv \mathbb{C}^{*\times n}/\cong$. Κατ' αναλογία, για $k \in \mathbb{N}^*$, ορίζουμε τους συμβολισμούς: $\mathbb{C}^{k\times n/\cong}$, $\mathbb{C}^{(+)*\times n/\cong}$ και $\mathbb{C}^{(+)k\times n/\cong}$, για τους αντίστοιχους χώρους πηλίκο.

Όλοι οι παραπάνω χώροι πηλίκο είναι πεπερασμένοι, με ακριβώς 2^n στοιχεία (μέλη). Επομένως, είναι όλοι ισόμορφοι μεταξύ τους και ισόμορφοι με τον χώρο $P(\{0,1\}^n) \equiv P(I(n))$, δηλαδή το δυναμοσύνολο των ερμηνειών για γλώσσα n ατόμων.

Σαν εφαρμογή των παραπάνω θα επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε το σύνολο μοντέλων του πίνακα Α, χρησιμοποιώντας αρχικά το πόρισμα 4.6 και στην συνέχεια την πρόταση 4.5:

$$A = \begin{bmatrix} 1+3i & 0 & 0 \\ -1+2i & 2i & 3 \\ 2 & 0 & 3i \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός αποτελείται από 3 γραμμές. Για την πρώτη, έστω $A^{(1)}$, έχουμε:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1+3i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Το σύνολο μοντέλων του $A^{(1)}$ είναι $\mathrm{mod}(A^{(1)}) = I_{11} \times I_{12} \times I_{13}$, όπου:

$I_{11} = \varnothing$, αφού $1+3i \in \mathbb{C}_*$,

$I_{12} = \{0,1\}$, αφού $0 \in \mathbb{C}_0$,

$I_{13} = \{0,1\}$, αφού $0 \in \mathbb{C}_0$.

Έτσι $\mathrm{mod}(A^{(1)}) = \varnothing \times \{0,1\} \times \{0,1\} = \varnothing$.

Με όμοιο τρόπο, έχουμε ότι:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} -1+2i & 2i & 3 \end{bmatrix}, A^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3i \end{bmatrix}$$

οπότε το σύνολο μοντέλων του $A^{(2)}$ είναι $\mathrm{mod}(A^{(2)}) = I_{21} \times I_{22} \times I_{23}$, όπου:

$I_{21} = \{0\}$, αφού $-1+2i \in \mathbb{C}_-$,

$I_{22}=\{0\}$, αφού $2i\in\mathbb{C}_-$,

$I_{23}=\{1\}$, αφού $3\in\mathbb{C}_+$.

Έτσι $mod(A^{(2)})=\{0\}\times\{0\}\times\{1\}=\{(0,0,1)\}$.

Ομοίως, το σύνολο μοντέλων του $A^{(3)}$ είναι $mod(A^{(3)})=I_{31}\times I_{32}\times I_{33}$, όπου:

$I_{31}=\{1\}$, αφού $2\in\mathbb{C}_+$,

$I_{32}=\{0,1\}$, αφού $0\in\mathbb{C}_0$,

$I_{33}=\{0\}$, αφού $3i\in\mathbb{C}_-$.

Έτσι $mod(A^{(3)})=\{1\}\times\{0,1\}\times\{0\}=\{(1,0,0), (1,1,0)\}$.

Τελικά δηλαδή, $mod(A)=mod(A^{(1)})\cup mod(A^{(2)})\cup mod(A^{(3)})=\{(0,0,1), (1,0,0), (1,1,0)\}$.

Με την χρήση της πρότασης 4.5, έχουμε άμεσα ότι η ENF μορφή του A είναι:

$$ENF(A) =$$
$$= (A_1(1+3i) + A_2(0) + A_3(0))$$
$$| (A_1(-1+2i) + A_2(2i) + A_3(3))$$
$$| (A_1(2) + A_2(0) + A_3(3i))$$

Επίσης, ισχύουν οι ισότητες:

$I_{11}=mod(A_1(1+3i))=\varnothing\times\{0,1\}\times\{0,1\}=\varnothing$, αφού $1+3i\in\mathbb{C}_*$,

$I_{12}=mod(A_2(0))=\{0,1\}\times\{0,1\}\times\{0,1\}$, αφού $0\in\mathbb{C}_0$,

$I_{13}=mod(A_3(0))=\{0,1\}\times\{0,1\}\times\{0,1\}$, αφού $0\in\mathbb{C}_0$,

$I_{21}=mod(A_1(-1+2i))=\{0\}\times\{0,1\}\times\{0,1\}$, αφού $-1+2i\in\mathbb{C}_-$,

$I_{22}=mod(A_2(2i))=\{0,1\}\times\{0\}\times\{0,1\}$, αφού $2i\in\mathbb{C}_-$,

$I_{23}=mod(A_3(3))=\{0,1\}\times\{0,1\}\times\{1\}$, αφού $3\in\mathbb{C}_+$,

$I_{31}=mod(A_1(2))=\{1\}\times\{0,1\}\times\{0,1\}$, αφού $2\in\mathbb{C}_+$,

$I_{32}=mod(A_2(0))=\{0,1\}\times\{0,1\}\times\{0,1\}$, αφού $0\in\mathbb{C}_0$,

$I_{33}=mod(A_3(3i))=\{0,1\}\times\{0,1\}\times\{0\}$, αφού $3i\in\mathbb{C}_-$.

Συνεπώς:

$mod(A)=(I_{11}\cap I_{12}\cap I_{13})\cup(I_{21}\cap I_{22}\cap I_{23})\cup(I_{31}\cap I_{32}\cap I_{33})=$
$=(\varnothing\cap(\{0,1\}\times\{0,1\}\times\{0,1\})\cap(\{0,1\}\times\{0,1\}\times\{0,1\}))$
$\cup((\{0\}\times\{0,1\}\times\{0,1\})\cap(\{0,1\}\times\{0\}\times\{0,1\})\cap(\{0,1\}\times\{0,1\}\times\{1\}))$
$\cup((\{1\}\times\{0,1\}\times\{0,1\})\cap(\{0,1\}\times\{0,1\}\times\{0,1\})\cap(\{0,1\}\times\{0,1\}\times\{0\}))=$
$=\varnothing\cup(\{0\}\times\{0\}\times\{1\})\cup(\{1\}\times\{0,1\}\times\{0\})=\{(0,0,1)\}\cup\{(1,0,0), (1,1,0)\}=$
$=\{(0,0,1), (1,0,0), (1,1,0)\}$, δηλαδή το ίδιο με παραπάνω.

4.5 Πράξεις με Πίνακες

Έχοντας θεμελιώσει θεωρητικά τις ερμηνείες για πίνακες, πρέπει να ορίσουμε με κάποιο τρόπο και τις λογικές πράξεις στους πίνακες για να είναι πλήρες το μοντέλο μας. Μας ενδιαφέρουν μόνο οι τρεις πράξεις: $\vee$, $\wedge$, $\neg$. Επιπλέον πράξεις όπως η συνεπαγωγή και η ισοδυναμία δεν συμπεριλαμβάνονται στο μοντέλο μας, αν και μπορούν εύκολα να προστεθούν εκ των υστέρων. Αυτό που κυρίως μας ενδιαφέρει κατά τον ορισμό των πράξεων, είναι να εξομοιώνουν τις αντίστοιχες πράξεις του προτασιακού λογισμού σε ότι αφορά την επίδραση τους πάνω στα μοντέλα των πινάκων. Όπως θα δούμε, μπορούμε να ορίσουμε πολλές πράξεις με τις ιδιότητες αυτές. Έτσι, αρχικά ορίζουμε κάποιες κλάσεις συναρτήσεων:

Ορισμός 4.10

Ορίζουμε τρεις κλάσεις συναρτήσεων στο $\mathbb{C}^{*\times n}$, τις οποίες συμβολίζουμε με $\mathcal{F}_{\vee}$, $\mathcal{F}_{\wedge}$ και $\mathcal{F}_{\neg}$, και ονομάζουμε *κλάση συναρτήσεων διάζευξης* (*class of disjunction functions*), *κλάση συναρτήσεων σύζευξης* (*class of conjunction functions*) και *κλάση συναρτήσεων άρνησης* (*class of negation functions*) αντίστοιχα. Οι κλάσεις αυτές ορίζονται ως εξής:

- Μία συνάρτηση $f_{\vee}:\mathbb{C}^{*\times n}\times\mathbb{C}^{*\times n}\to\mathbb{C}^{*\times n}$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{F}_{\vee}$ ανν $\forall A,B\in\mathbb{C}^{*\times n}$, $mod(f_{\vee}(A,B))=mod(A)\cup mod(B)$.
  Θα συμβολίζουμε το αποτέλεσμα της εφαρμογής της $f_{\vee}$ πάνω στους A,B με $A\vee B$, δηλαδή $A\vee B=f_{\vee}(A,B)$.
- Μία συνάρτηση $f_{\wedge}:\mathbb{C}^{*\times n}\times\mathbb{C}^{*\times n}\to\mathbb{C}^{*\times n}$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{F}_{\wedge}$ ανν $\forall A,B\in\mathbb{C}^{*\times n}$, $mod(f_{\wedge}(A,B))=mod(A)\cap mod(B)$.
  Θα συμβολίζουμε το αποτέλεσμα της εφαρμογής της $f_{\wedge}$ πάνω στους A,B με $A\wedge B$, δηλαδή $A\wedge B=f_{\wedge}(A,B)$.
- Μία συνάρτηση $f_{\neg}:\mathbb{C}^{*\times n}\to\mathbb{C}^{*\times n}$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{F}_{\neg}$ ανν $\forall A\in\mathbb{C}^{*\times n}$, $mod(f_{\neg}(A))=I(n)\backslash mod(A)$.
  Θα συμβολίζουμε το αποτέλεσμα της εφαρμογής της $f_{\neg}$ πάνω στον A με $\neg A$, δηλαδή $\neg A=f_{\neg}(A)$.

Είναι σαφές ότι η επίδραση όλων των πράξεων (συναρτήσεων) της κλάσης $\mathcal{F}_{\vee}$ πάνω στο σύνολο μοντέλων δύο πινάκων, είναι η ίδια με την επίδραση της λογικής πράξης $\vee$ πάνω στο σύνολο μοντέλων δύο λογικών προτάσεων. Αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει για την πράξη $\wedge$ και την κλάση $\mathcal{F}_{\wedge}$, όπως και για την πράξη $\neg$ και την κλάση $\mathcal{F}_{\neg}$. Με δεδομένο ότι τα σύνολα μοντέλων ενός πίνακα και μίας λογικής

πρότασης είναι συγκρίσιμα, η παραπάνω ιδιότητα θα φανεί πολύ χρήσιμη στην συνέχεια.

Ορισμός 4.11

Ο χώρος $\mathbb{C}^{*\times n}$, εφοδιασμένος με τρεις πράξεις που θα συμβολίζουμε με $\vee$, $\wedge$, $\neg$, οι οποίες ανήκουν στις κλάσεις συναρτήσεων $\mathcal{F}_{\vee}$, $\mathcal{F}_{\wedge}$ και $\mathcal{F}_{\neg}$ αντίστοιχα ($\vee\in\mathcal{F}_{\vee}$, $\wedge\in\mathcal{F}_{\wedge}$, $\neg\in\mathcal{F}_{\neg}$), ονομάζεται *λογικά πλήρης χώρος πινάκων διαστάσεως n* (*logically complete matrix space of dimension n*). Θα συμβολίζουμε τέτοιους χώρους με την τετράδα: $(\mathbb{C}^{*\times n},\vee,\wedge,\neg)$.

Πρέπει να τονιστεί ότι δεν θέτουμε περιορισμούς ως προς τον ακριβή ορισμό των βασικών πράξεων $\vee$, $\wedge$, $\neg$ στους λογικά πλήρεις χώρους, αρκεί αυτές να πληρούν τις συνθήκες του ορισμού 4.10 για τις κλάσεις $\mathcal{F}_{\vee}$, $\mathcal{F}_{\wedge}$, $\mathcal{F}_{\neg}$. Προφανώς υπάρχουν πολλοί τρόποι ορισμού των πράξεων αυτών και διαφορετικές επιλογές δίνουν διαφορετικούς λογικά πλήρεις χώρους. Αν περιοριστούμε στους χώρους πηλίκο δεν υπάρχει διαφορά, και όλοι οι λογικά πλήρεις χώροι πηλίκο της ίδιας διάστασης είναι ισοδύναμοι. Στο παράρτημα Α της παρούσας αναφοράς υπάρχουν κάποια παραδείγματα συναρτήσεων οι οποίες ανήκουν στις παραπάνω κλάσεις. Όπως είπαμε, άλλες πράξεις της προτασιακής λογικής δεν θα μας χρειαστούν στην παρούσα μελέτη, για αυτό και δεν συμπεριλαμβάνονται στο μοντέλο μας. Η προσθήκη τους μπορεί να γίνει με εντελώς ανάλογο τρόπο, αν χρειαστεί.

4.6 Μετασχηματισμός Πινάκων

Έχοντας εφοδιάσει το σύνολο των πινάκων με τις παραπάνω βασικές πράξεις και τις ερμηνείες το μόνο που μένει είναι να δούμε πώς μετατρέπουμε μία λογική πρόταση σε πίνακα και αντίστροφα. Για τον σκοπό αυτό θα ορίσουμε τον *μετασχηματισμό πινάκων* (*table transformation function*) και τον *αντίστροφο μετασχηματισμό πινάκων* (*inverse table transformation function*):

Ορισμός 4.12

Έστω $(\mathbb{C}^{*\times n},\vee,\wedge,\neg)$ ένας λογικά πλήρης χώρος διαστάσεως n και έστω μία πεπερασμένη γλώσσα με n άτομα: $L=\{T,F,(,),\vee,\wedge,\neg,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$. Ορίζουμε αναδρομικά τον *μετασχηματισμό πινάκων* (*table transformation function*), $TT:L^{*}\rightarrow\mathbb{C}^{*\times n}$ ως εξής:

- $TT(T)=T_n$
- $TT(F)=F_n$

- Για κάθε $j\in\{1,2,\ldots,n\}$: $TT(\alpha_j)=A_j$, όπου α_j τα άτομα της γλώσσας L και A_j τα j-άτομα του χώρου $\mathbb{C}^{*\times n}$
- $TT(p\vee q)=TT(p)\vee TT(q)$, για κάθε $p, q\in L^*$
- $TT(p\wedge q)=TT(p)\wedge TT(q)$, για κάθε $p, q\in L^*$
- $TT(\neg p)=\neg TT(p)$, για κάθε $p\in L^*$

Αντίστοιχα, ορίζουμε τον *αντίστροφο μετασχηματισμό πινάκων* (*inverse table transformation function*), $TTI:\mathbb{C}^{*\times n}\to L^*$, αναδρομικά ως εξής:

- Για κάθε $j\in\{1,2,\ldots,n\}$, $z\in\mathbb{C}$, ορίζουμε:
  - $TTI(A_j(z))=\alpha_j$, ανν $z\in\mathbb{C}_+\backslash\mathbb{C}_-$
  - $TTI(A_j(z))=\neg\alpha_j$, ανν $z\in\mathbb{C}_-\backslash\mathbb{C}_+$
  - $TTI(A_j(z))=T$, ανν $z\in\mathbb{C}_0$
  - $TTI(A_j(z))=F$, ανν $z\in\mathbb{C}_*$

  όπου ως συνήθως α_j είναι τα άτομα της γλώσσας L και $A_j(z)$ τα γενικευμένα j-άτομα του χώρου $\mathbb{C}^{*\times n}$
- Γενικά, για κάθε $m\in\mathbb{N}^*$ και κάθε πίνακα $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, με ENF:

  $A=(\sum_{j=1}^{n}A_j(z_{1j}))\,|\,(\sum_{j=1}^{n}A_j(z_{2j}))\,|\ldots|\,(\sum_{j=1}^{n}A_j(z_{mj}))$, ορίζουμε:

  $TTI(A)=\bigvee_{k=1}^{m}(\bigwedge_{j=1}^{n}TTI(A_j(z_{kj})))$

Εδώ είναι πλέον εμφανές ότι ο μετασχηματισμός πινάκων εφαρμόζεται σε οποιαδήποτε λογική πρόταση, ανεξαρτήτως του αν είναι σε DNF ή όχι. Έτσι ξεπερνάμε και τον περιορισμό που είχαμε θέσει στην αρχή αυτού του κεφαλαίου. Επίσης, ο μετασχηματισμός TT εξαρτάται από τον ορισμό των πράξεων $\vee$, $\wedge$, $\neg$, συνεπώς υπάρχουν περισσότεροι του ενός τρόποι ορισμού του. Θα δείξουμε ότι ο τρόπος που περιγράψαμε στην αρχή του κεφαλαίου είναι ένας από τους πιθανούς, αλλά πάσχει από τον περιορισμό ότι η λογική πρόταση πρέπει να είναι σε DNF. Για τον λόγο αυτό δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί άμεσα στην γενική περίπτωση. Θα δούμε στο παράρτημα Α τον συγκεκριμένο τρόπο ορισμού των πράξεων $\vee$, $\wedge$, $\neg$, ώστε το αποτέλεσμα της TT για προτάσεις σε DNF να είναι το ίδιο με αυτό που δίνει η παραπάνω τεχνική.

Η χρησιμότητα των μετασχηματισμών TT και TTI προκύπτει από την παρακάτω ιδιότητα, η οποία δίνει την σχέση μοντέλων μεταξύ πινάκων και των αντίστοιχών τους λογικών προτάσεων (και αντίστροφα):

Πρόταση 4.6

Έστω $(\mathbb{C}^{*\times n},\vee,\wedge,\neg)$ ένας λογικά πλήρης χώρος διαστάσεως n και $L=\{T,F,(,),\vee,\wedge,\neg,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ μια γλώσσα με n άτομα. Τότε:

- Για κάθε πρόταση $p\in L^*$ ισχύει: $mod(p)=mod(TT(p))$.
- Για κάθε πίνακα $P\in\mathbb{C}^{*\times n}$ ισχύει: $mod(P)=mod(TTI(P))$.

Απόδειξη

Βλ. παράρτημα Α.

Παρατηρούμε ότι στην παραπάνω πρόταση δεν υπάρχει καμία απαίτηση ως προς τον ορισμό των πράξεων $\vee$, $\wedge$, $\neg$, επομένως η πρόταση ισχύει για οποιονδήποτε λογικά πλήρη χώρο. Το σημαντικό της ιδιότητας αυτής είναι ότι κατά την μετάβαση από την λογική στους πίνακες και αντίστροφα δεν υπάρχει απώλεια πληροφορίας σε επίπεδο πιθανών κόσμων. Επιστρέφοντας στο πρόβλημα της αναθεώρησης πεποιθήσεων, αφού το σύνολο των μοντέλων παραμένει αναλλοίωτο κατά τις μετατροπές έπεται ότι και οι κόσμοι (ερμηνείες) που ικανοποιούν την βάση μας παραμένουν σταθεροί. Άρα η ερμηνεία W με την οποία ταυτίσαμε τον πραγματικό κόσμο (όπως και κάθε άλλη ερμηνεία) θα ανήκει στο σύνολο μοντέλων ενός πίνακα αν και μόνο αν ανήκει στο σύνολο μοντέλων της αντίστοιχής του λογικής πρότασης.

Επιπλέον, στην λογική, ισοδύναμες προτάσεις θεωρείται ότι περιέχουν την ίδια πληροφορία, συνεπώς αναφέρονται στην ίδια γνώση. Αυτό συμβαίνει διότι δίνουν ταυτόσημες απαντήσεις σε οποιοδήποτε ερώτημα. Λόγω της πρότασης 4.6, ισοδύναμες λογικές προτάσεις θα αντιστοιχούν σε ισοδύναμους πίνακες. Ανάλογα, δύο πίνακες οι οποίοι αντιστοιχούν σε ισοδύναμες λογικές προτάσεις, περιέχουν την ίδια πληροφορία (γνώση) με την παραπάνω έννοια, αλλά περιέχουν επίσης και πληροφορία σχετική με την ένταση (αξιοπιστία) της πεποίθησης που αντιπροσωπεύει η πρόταση αυτή. Δύο τέτοιοι πίνακες θα είναι και μεταξύ τους ισοδύναμοι, με βάση την πρόταση 4.6.

Τέλος, λόγω του γεγονότος ότι το πλήθος των πινάκων είναι υπεραριθμήσιμο, ενώ το πλήθος των λογικών προτάσεων είναι αριθμήσιμα άπειρο, έχουμε ότι υπάρχουν περισσότεροι του ενός πίνακες οι οποίοι αντιστοιχούν στην ίδια (όχι απλά ισοδύναμη) λογική πρόταση (προκύπτει απλά αλλάζοντας τον δείκτη RF). Από την παρατήρηση αυτή προκύπτει και ο ισχυρισμός της μεγαλύτερης εκφραστικής δύναμης του χώρου των πινάκων σε σχέση με την προτασιακή λογική.

Κεφάλαιο 5: Αναθεώρηση Πεποιθήσεων

5.1 Εισαγωγή – Πρώτες Παραδοχές

Η περιγραφή του μετασχηματισμού πινάκων στο προηγούμενο κεφάλαιο έδωσε κάποιες πρώτες ενδείξεις για τον τρόπο χρήσης του στο πρόβλημα της αναθεώρησης πεποιθήσεων. Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε την ακριβή μέθοδο αναθεώρησης. Θα κάνουμε την παραδοχή ότι κάθε είδος γνώσης (ενημέρωση) μπορεί να εκφραστεί με έναν πίνακα. Αυτή η παραδοχή είναι ούτως ή άλλως λιγότερο περιοριστική από τις συνήθεις στην βιβλιογραφία, όπου η νέα γνώση απαιτείται να εκφράζεται με κάποια λογική πρόταση. Όπως είδαμε ήδη, οι πίνακες είναι ισχυρότεροι εκφραστικά από την προτασιακή λογική, άρα ένας πίνακας περιέχει περισσότερη πληροφορία από την αντίστοιχή του λογική πρόταση.

Στο κεφάλαιο 3 είπαμε ότι θα αποθηκεύουμε με κάποιο κωδικοποιημένο τρόπο όλες τις ενημερώσεις που έχουν γίνει στην βάση, ακόμα και τις αντιφατικές. Η «κωδικοποίηση» αυτή θα γίνεται εντός του πίνακα αναπαράστασης της γνώσης μας. Δεν θα αποθηκεύουμε ένα σύνολο από ενημερώσεις, αλλά έναν πίνακα ο οποίος περιέχει όλη την χρήσιμη γνώση των ενημερώσεων. Τελικά δηλαδή σε οποιαδήποτε στιγμή η βάση γνώσης μας θα αποτελείται από έναν πίνακα του συνόλου $\mathbb{C}^{*\times n}$, ο οποίος θα περιέχει όλη την πληροφορία που χρειαζόμαστε για να απαντήσουμε σε επερωτήσεις του χρήστη και για να εκτελέσουμε μελλοντικές ενημερώσεις σωστά. Μετά την περιγραφή της μεθόδου αναθεώρησης παρακάτω θα αιτιολογήσουμε την επιλογή μας να χρησιμοποιούμε ένα μόνο πίνακα και όχι ένα σύνολο πινάκων (έναν για κάθε ενημέρωση).

5.2 Αναθεώρηση Πεποιθήσεων Μεταξύ Πινάκων

Η αναθεώρηση πεποιθήσεων είναι ένα πρόβλημα που αναφέρεται στην ενημέρωση βάσεων εκφρασμένων με λογικές προτάσεις και όχι με πίνακες. Εντούτοις δείξαμε ήδη την σχέση που υπάρχει μεταξύ πινάκων και προτασιακής λογικής, άρα μπορούμε απλά να εισάγουμε ένα βήμα μετατροπής της γνώσης μας από λογική σε πίνακες μέσω του μετασχηματισμού ΤΤ. Έτσι, το πρόβλημα της αναθεώρησης λογικών προτάσεων μετατοπίζεται στο πρόβλημα της αναθεώρησης γνώσης εκφρασμένης με πίνακες.

Αρχικά θα μελετήσουμε την περίπτωση ενημερώσεων κατά τις οποίες τόσο η βάση όσο και η ενημέρωση είναι πίνακες. Θα αγνοήσουμε δηλαδή το ενδιάμεσο βήμα

μετατροπής, το οποίο θεωρούμε και περιττό, μιάς και η γνώση μπορεί να εκφραστεί κατευθείαν σε μορφή πίνακα. Πέραν αυτού, με την ενημέρωση γνώσης εκφρασμένης σε πίνακες έχουμε δύο βασικά πλεονεκτήματα: πρώτον αποφεύγουμε την ανάγκη της χρήσης του μετασχηματισμού TT, ο οποίος προϋποθέτει τον ορισμό των πράξεων $\vee$, $\wedge$, $\neg$ και, δεύτερον, μας δίνεται η δυνατότητα αυθαίρετου ορισμού των δεικτών αξιοπιστίας. Είναι προφανές ότι κάθε συγκεκριμένη λογική πρόταση $p \in L^*$, έχει έναν ακριβώς αντίστοιχο πίνακα, τον $TT(p) \in \mathbb{C}^{*\times n}$. Έτσι, η αξιοπιστία του κάθε ατόμου στον πίνακα TT(p) υποδεικνύεται κατά κάποιο τρόπο από τον ορισμό του μετασχηματισμού TT και δεν μπορεί να αλλαχθεί με κανένα τρόπο από τον χρήστη. Με την χρήση πινάκων σαν είσοδο στον αλγόριθμο ενημερώσεων, έχουμε απόλυτη ελευθερία στον ορισμό των δεικτών αξιοπιστίας κάθε ατόμου του κάθε πιθανού κόσμου, συνεπώς και μεγαλύτερη ευελιξία. Σε επόμενο στάδιο, θα δούμε πώς μπορούμε να έχουμε λογικές προτάσεις στην είσοδο του αλγορίθμου μας.

Προς το παρόν θα κάνουμε την επιπλέον παραδοχή ότι τόσο η βάση όσο και η ενημέρωση είναι πίνακες του χώρου $\mathbb{C}^{1\times n}$, δηλαδή έχουν μία ακριβώς γραμμή. Στην περίπτωση αυτή, η μοναδική γραμμή του πίνακα της βάσης, έστω K, αντιπροσωπεύει τον μοναδικό πιθανό κόσμο της βάσης και περιέχει έναν δείκτη αξιοπιστίας (δηλαδή έναν μιγαδικό αριθμό) για κάθε άτομο της γλώσσας. Ο αριθμός αυτός μπορεί να ανήκει στο σύνολο $\mathbb{C}^{(+)}$ (θετική αξιοπιστία), ή όχι (αρνητική αξιοπιστία). Μπορεί επίσης να είναι ίσος με 0 (έλλειψη γνώσης), ή να υποδηλώνει άρνηση ατόμου. Ανεξαρτήτως μορφής όμως, υποδηλώνει την εμπιστοσύνη μας στο εν λόγω άτομο και στην άρνηση του. Όμοιες παρατηρήσεις ισχύουν και για τον πίνακα της ενημέρωσης (έστω M).

Η πρώτη παρατήρηση που γίνεται άμεσα είναι ότι η αξιοπιστία ενός ατόμου α δεν επηρρεάζει και δεν επηρρεάζεται από την αξιοπιστία ενός άλλου ατόμου α′. Έτσι, η αξιοπιστία του κάθε ατόμου στο αποτέλεσμα της ενημέρωσης θα πρέπει να εξαρτάται αποκλειστικά από την αξιοπιστία του ατόμου αυτού στην βάση και στην ενημέρωση.

Έστω λοιπόν ένα δεδομένο άτομο α, του οποίου η αξιοπιστία είναι z_1 στον πίνακα της βάσης και z_2 στον πίνακα της ενημέρωσης ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$). Αυτό σημαίνει ότι πιστεύουμε με ένταση $Re(z_1)$ στην κατάφαση του α στην υπάρχουσα γνώση, και αντίστοιχα πιστεύουμε με ένταση $Re(z_2)$ στην κατάφαση του α στην νέα γνώση (ενημέρωση). Προκύπτει εντελώς φυσικά ότι στην νέα, ενημερωμένη γνώση θα πρέπει να πιστεύουμε στην κατάφαση του α με ένταση $Re(z_1)+Re(z_2)$. Αν $Re(z_1)>0$, $Re(z_2)>0$, η πράξη αυτή θα μας δώσει μία ένταση πεποίθησης στην κατάφαση του α μεγαλύτερη από πριν, δηλαδή θα ενισχύσει την πίστη μας στην αλήθεια του α. Αν $Re(z_2)<0$, τότε η ενημέρωση θα προκαλέσει την μείωση της πίστης μας στην αλήθεια

του α. Μπορούμε να κάνουμε ανάλογους συλλογισμούς για την περίπτωση που $Re(z_1)<0$ ή $Re(z_2)=0$ κτλ.

Σκεπτόμενοι με όμοιο τρόπο για την άρνηση του α, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι στην ενημερωμένη γνώση θα πρέπει να πιστεύουμε στην άρνηση του α με ένταση $Im(z_1)+Im(z_2)$. Τελικά δηλαδή η αξιοπιστία του ατόμου α στον πίνακα που αντιπροσωπεύει το αποτέλεσμα της ενημέρωσης (έστω K′) θα πρέπει να είναι ίση με: z_1+z_2. Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα αυτό για όλα τα άτομα της γλώσσας έχουμε ότι ο τελικός, ενημερωμένος πίνακας θα πρέπει να είναι το άθροισμα των πινάκων K και M, δηλαδή K′=K+M.

Θυμίζουμε ότι το αποτέλεσμα αυτό ισχύει στην ειδική περίπτωση που και η βάση και η ενημέρωση αποτελούνται από έναν ακριβώς πιθανό κόσμο (ή ισοδύναμα οι αντίστοιχοι πίνακες έχουν μία μόνο γραμμή, δηλαδή ανήκουν στο σύνολο $\mathbb{C}^{1\times n}$). Στην γενική περίπτωση όπου οι πίνακες αυτοί έχουν περισσότερες της μίας γραμμές, η συλλογιστική είναι διαφορετική. Η κάθε γραμμή του πίνακα της βάσης και η κάθε γραμμή του πίνακα της ενημέρωσης αντιπροσωπεύουν ένα διαφορετικό πιθανό κόσμο. Αυτό σημαίνει ότι ο πραγματικός κόσμος (υποτίθεται ότι) περιγράφεται από μία (τουλάχιστον) από τις γραμμές του K και μία (τουλάχιστον) από τις γραμμές του M. Επειδή δεν μπορούμε με κανένα τρόπο να είμαστε σίγουροι ως προς το ποιά γραμμή του K και ποια γραμμή του M είναι οι σωστές πρέπει να δεχτούμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς πιθανών κόσμων. Άρα λοιπόν ο νέος πίνακας (δηλαδή το αποτέλεσμα της ενημέρωσης) θα πρέπει να περιέχει μία γραμμή για κάθε συνδυασμό γραμμών των K, M. Σε κάθε τέτοια γραμμή θα δεχόμαστε αξιωματικά ότι ο συγκεκριμένος συνδυασμός πιθανών κόσμων είναι ο σωστός και έτσι η ενημέρωση θα γίνεται σαν να επρόκειτο για πίνακες με ένα πιθανό κόσμο. Τελικά, λόγω της επιλογής όλων των δυνατών συνδυασμών ο πραγματικός κόσμος θα αντιπροσωπεύεται από κάποια από τις γραμμές του αποτελέσματος.

Με βάση τα παραπάνω έχουμε ότι για να βρούμε το αποτέλεσμα της ενημέρωσης ενός πίνακα K με ένα πίνακα M, προσθέτουμε (χρησιμοποιώντας την γνωστή πράξη της πρόσθεσης πινάκων-γραμμών) κάθε γραμμή του πίνακα K με κάθε γραμμή του M, δημιουργώντας μία γραμμή στο αποτέλεσμα K′ για κάθε συνδυασμό γραμμών των K, M. Αυστηρότερα, ορίζουμε την πράξη της ενημέρωσης «•» ως εξής:

Ορισμός 5.1

Έστω $k, m\in\mathbb{N}^*$, και πίνακες $A\in\mathbb{C}^{k\times n}$, $B\in\mathbb{C}^{m\times n}$, τέτοιοι ώστε $A=A^{(1)}|A^{(2)}|\ldots|A^{(k)}$, $B=B^{(1)}|B^{(2)}|\ldots|B^{(m)}$, όπου $A^{(j)}\in\mathbb{C}^{1\times n}$, $j\in\{1,2,\ldots,k\}$, $B^{(j)}\in\mathbb{C}^{1\times n}$, $j\in\{1,2,\ldots,m\}$. Τότε ορίζουμε την πράξη της ενημέρωσης του πίνακα A από τον πίνακα B ως εξής:

$$A\bullet B=\mathop{|}_{h=1}^{h=k}\mathop{|}_{j=1}^{j=m}(A^{(h)}+B^{(j)}).$$

5.3 Παραδείγματα

Ας δούμε τώρα κάποια παραδείγματα εφαρμογής της παραπάνω μεθόδου. Υποθέτουμε ότι δουλεύουμε σε μία απλή γλώσσα, με δύο μόνο άτομα, τα α_1 και α_2. Σαν ένα πρώτο αρχικό παράδειγμα ας δούμε την περίπτωση κατά την οποία έχουμε δύο πίνακες τους K και M, οι οποίοι έχουν μία μόνο γραμμή:

$$K = \begin{bmatrix} 3 & 2i \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας K αντιστοιχεί στην πρόταση $TTI(K)=\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2)$, ενώ ο M αντιστοιχεί στην $TTI(M)=\alpha_1\wedge T\equiv\alpha_1$. Σχετικά με το άτομο α_1 έχουμε μία ενίσχυση της πεποίθησης ότι είναι αληθές, αφού το πιστεύαμε με ένταση 3 και η ενημέρωση μας προτρέπει να ενισχύσουμε την πεποίθησή μας αυτή κατά 2. Για το άτομο α_2, η ενημέρωση M δεν μας δίνει καμία επιπλέον πληροφορία, αφού η αξιοπιστία του στον M είναι 0. Συνεπώς οι πεποιθήσεις μας σχετικά με το α_2 δεν πρέπει να αλλάξουν. Έτσι έχουμε:

$$K' = K \bullet M = \begin{bmatrix} 3 & 2i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2i \end{bmatrix}$$

οπότε $TTI(K')=\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2)$, κάτι το οποίο είναι αναμενόμενο, αφού ο M δεν αντιφάσκει με την υπάρχουσα πληροφορία.

Στην συνέχεια θα δούμε ένα πιο πολύπλοκο παράδειγμα. Έστω ότι η βάση μας αποτελείται αρχικά από τον πίνακα:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ο οποίος μέσω της συνάρτησης TTI μας δίνει: $TTI(K)=\alpha_1\wedge T\equiv\alpha_1$. Με άλλα λόγια ο πίνακας αυτός αναπαριστά την γνώση ότι το α_1 είναι αληθές. Ας υποθέσουμε ότι η πρώτη ενημέρωση πάνω στην βάση μας είναι ο πίνακας:

$$M_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ο οποίος αναπαριστά την γνώση $TTI(M_1)=((\neg\alpha_1)\wedge T)\vee(T\wedge\alpha_2)\equiv(\neg\alpha_1)\vee\alpha_2\equiv\alpha_1\rightarrow\alpha_2$. Το αποτέλεσμα της ενημέρωσης είναι ο πίνακας:

$$K_1 = K \bullet M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & 0 \end{bmatrix}) \mid (\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+i & 0 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Δηλαδή τελικά ο ενημερωμένος πίνακας K_1 είναι ο:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση TTI πάνω στον K_1 παίρνουμε:
$TTI(K_1)=(F\wedge T)\vee(\alpha_1\wedge\alpha_2)\equiv\alpha_1\wedge\alpha_2$.

Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο, δεδομένου ότι αν γνωρίζουμε την αλήθεια ενός ατόμου α_1, καθώς και την σχέση $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ισχύει $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ (modus ponens). Παρατηρήστε όμως ότι η πρώτη γραμμή, παρά το ότι αντιστοιχεί σε αντιφατική πρόταση, διατηρείται στον πίνακα. Αυτό μπορεί να έχει συνέπειες σε μελλοντικές ενημερώσεις.

Ας υποθέσουμε ότι η επόμενη ενημέρωση είναι ο πίνακας:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & i \end{bmatrix}$$

ο οποίος αντιστοιχεί στην λογική πρόταση $TTI(M_2)=T \wedge (\neg\alpha_2) \cong \neg\alpha_2$. Είναι εκ των προτέρων εμφανές ότι ο M_2 αντιφάσκει με τον K_1, αφού ο K_1 απαιτεί την αλήθεια του ατόμου α_2, ενώ ο M_2 απαιτεί την αλήθεια της άρνησης του α_2. Αν εκτελέσουμε την ενημέρωση θα πάρουμε:

$$K_2 = K_1 \bullet M_2 = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+i & i \\ 1 & 1+i \end{bmatrix}$$

ο οποίος αντιστοιχεί στην αντίφαση: $TTI(K_2)=(F \wedge (\neg\alpha_2)) \vee (\alpha_1 \wedge F) \cong F$. Είναι γνωστό ότι η λογική πρόταση F δίνει σαν συνέπειά της οποιαδήποτε λογική πρόταση $p \in L^*$. Συνεπώς, η γνώση την οποία αναπαριστά ο K_2 είναι άχρηστη και η βάση K_2 ασυνεπής. Πρακτικά δεν έχουμε καμία πληροφορία για τον κόσμο αφού είμαστε υποχρεωμένοι να δεχτούμε οποιαδήποτε λογική πρόταση σαν αληθή.

Το πρόβλημα αυτό είχε προβλεφθεί στο κεφάλαιο 3. Από την στιγμή που όλες οι ενημερώσεις (ακόμα και οι αντιφατικές) γίνονται αποδεκτές, είναι αναμενόμενο ο τελικός πίνακας να περιέχει αντιφάσεις σε ορισμένες περιπτώσεις. Στην πρώτη ενημέρωση (πίνακας K_1) η αντίφαση της πρώτης γραμμής δεν δημιούργησε προβλήματα αφού υπήρχε η δεύτερη, μη αντιφατική γραμμή. Στον πίνακα K_2 όμως, όλες οι γραμμές είναι αντιφατικές και η αντίστοιχη λογική πρόταση ($TTI(K_2) \cong F$) δεν μας δίνει καμία ουσιώδη πληροφορία για τον κόσμο.

Προκειμένου να επιλυθεί το πρόβλημα, είχαμε πει ότι θα έπρεπε με κάποιο τρόπο να μπορούμε να βρούμε τις αντιφάσεις, να αξιολογήσουμε την «έντασή» τους και να άρουμε τις «λιγότερο έντονες» από αυτές πριν την εκτέλεση κάποιου ερωτήματος. Με άλλα λόγια, αν το αποτέλεσμα μίας ενημέρωσης είναι ένας πίνακας K, τότε η λογική πρόταση που αναπαριστά την γνώση της βάσης δεν θα πρέπει να είναι η πρόταση TTI(K), αλλά να προκύπτει με κάποια άλλη διαδικασία. Η διαδικασία αυτή είναι η τεχνική εκτέλεσης επερωτήσεων που θα ορίσουμε παρακάτω.

5.4 Επερωτήσεις

Για την εκτέλεση των επερωτήσεων πάνω σε πίνακες, υπάρχουν δύο βασικές τεχνικές που μπορούμε να ακολουθήσουμε. Η πρώτη τεχνική θα περιλάμβανε την μετατροπή της επερώτησης σε πίνακα και στην συνέχεια την εκτέλεση κάποιας πράξης μεταξύ του πίνακα της επερώτησης και του πίνακα της βάσης. Η πράξη αυτή

θα έπρεπε να δίνει κάποιο αποτέλεσμα από το σύνολο {T, F, Unknown} (υπόθεση ανοιχτού κόσμου – open world assumption) ή ενδεχομένως από το {T, F} (υπόθεση κλειστού κόσμου – closed world assumption) ή από το σύνολο [0,1] (αν χρησιμοποιήσουμε τεχνικές ασαφούς λογικής – fuzzy logic) κοκ.

Κατά την προηγούμενη ανάλυση όμως υποννοήσαμε ότι η εκτέλεση της επερώτησης θα γίνει μεταξύ λογικών προτάσεων. Αυτό μπορεί να γίνει με την χρήση της δεύτερης τεχνικής η οποία μετατρέπει τον πίνακα της βάσης σε κάποια λογική πρόταση η οποία αναπαριστά την γνώση μας και στην συνέχεια εκτελείται η επερώτηση απευθείας πάνω σε αυτή την λογική πρόταση.

Στην παρούσα εργασία προτιμήσαμε την δεύτερη προσέγγιση, δεδομένου ότι το πρόβλημα της εκτέλεσης επερωτήσεων με λογικές προτάσεις είναι ένα γνωστό πρόβλημα πάνω στο οποίο έχουν ασχοληθεί πολλοί ερευνητές κατά το παρελθόν. Η πρώτη τεχνική πάντως έχει κάποιο ενδιαφέρον σαν μία εναλλακτική πρόταση και θα μπορούσε να μελετηθεί ως μελλοντική εργασία.

Χρησιμοποιώντας την τεχνική της μετατροπής της βάσης σε λογική πρόταση, μεταθέτουμε το πρόβλημα της εκτέλεσης επερωτήσεων στο πρόβλημα της εύρεσης μίας λογικής πρότασης η οποία θα αναπαριστά με σωστό τρόπο την γνώση της βάσης μας. Είδαμε ήδη στην προηγούμενη ενότητα ότι ο μετασχηματισμός TTI είναι ακατάλληλος για την διαδικασία αυτή. Για τον λόγο αυτό θα πρέπει να ορίσουμε κάποιον άλλο μετασχηματισμό, τον οποίο θα ονομάσουμε *μετασχηματισμό επερωτήσεων* (*query transformation*) και θα συμβολίζουμε με QT.

Όπως θα δούμε, ο ορισμός του μετασχηματισμού επερωτήσεων δεν είναι ανεξάρτητος της μεθόδου αναθεώρησης που προτείνουμε αλλά αποτελεί κομμάτι αυτής. Θα δείξουμε ότι διαφορετικοί τρόποι ορισμού της συνάρτησης QT τελικά παράγουν διαφορετικούς αλγορίθμους ενημέρωσης. Αυτό συμβαίνει διότι η μετατροπή ενός πίνακα (ειδικά ενός αντιφατικού πίνακα) σε λογική πρόταση εν γένει εμπεριέχει και ένα βήμα άρσης των αντιφάσεων, το οποίο περιλαμβάνει κάποιου είδους «εκτίμηση» του νοήματος (γνώσης) που περιέχει ο πίνακας αυτός και της «έντασης» της κάθε αντίφασης.

5.5 Περιγραφή Μετασχηματισμού Επερωτήσεων

Στην παρούσα ενότητα θα περιγράψουμε με μη αυστηρό τρόπο τον μετασχηματισμό επερωτήσεων, τον οποίο θα ορίσουμε στην επόμενη. Ο μετασχηματισμός αυτός θα πρέπει να είναι μία συνάρτηση από το σύνολο των πινάκων ($\mathbb{C}^{*\times n}$) στο σύνολο των λογικών προτάσεων (L^*). Η συνάρτηση αυτή θα πρέπει με κάποιο τρόπο να αξιολογεί την κάθε αντίφαση, ή ισοδύναμα να αξιολογεί την αξιοπιστία κάθε κομματιού πληροφορίας που υπάρχει στον πίνακα. Μετά την αξιολόγηση αυτή, τα πιο αξιόπιστα κομμάτια πληροφορίας θα πρέπει να εξάγονται

και οι τυχόν αντιφάσεις που υπάρχουν σε αυτά να επιλύονται με το μικρότερο δυνατό κόστος σε απώλεια πληροφορίας. Τελικά, το αποτέλεσμα θα πρέπει να μετατρέπεται σε λογική πρόταση και να δίνεται ως το αποτέλεσμα της συνάρτησης. Η παραπάνω διαδικασία θα γίνει πιο σαφής μετά την ανάλυση που ακολουθεί.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, κάθε γραμμή του πίνακα της βάσης αναπαριστά έναν πιθανό κόσμο, δηλαδή μία από τις πιθανές καταστάσεις (ερμηνείες) του κόσμου που μοντελοποιούμε. Προκειμένου να βρούμε την πραγματική κατάσταση, πρέπει να αξιολογήσουμε με κάποιο τρόπο την «αξιοπιστία» του κάθε πιθανού κόσμου και στην συνέχεια να επιλέξουμε τους πιο αξιόπιστους από τους κόσμους της βάσης μας. Δυστυχώς δεν μπορούμε κατά κανόνα να είμαστε βέβαιοι ως προς την ορθότητα της επιλογής μας, εντούτοις μία μέθοδος εκτίμησης της αξιοπιστίας κάθε πιθανού κόσμου (γραμμής) είναι επιβεβλημένη. Προκειμένου να κάνουμε την εκτίμηση αυτήν θα χρησιμοποιήσουμε μία συνάρτηση την οποία θα ονομάσουμε *συνάρτηση αξιοπιστίας γραμμής* (*line reliability function*) και θα συμβολίζουμε με RL.

Αν περιοριστούμε σε κάποια γραμμή του πίνακα, είναι σαφές ότι η αξιοπιστία της θα εξαρτάται από τους μιγαδικούς αριθμούς που αναπαριστούν την πίστη μας σε κάθε άτομο της γλώσσας. Μία γραμμή με πολλές αντιφάσεις (αντιφατικά στοιχεία) είναι προφανώς λιγότερο αξιόπιστη από μία με λίγες. Τα στοιχεία από τα οποία αποτελείται κάθε γραμμή είναι ως γνωστόν της μορφής x+yi και εκφράζουν την πίστη μας στην κατάφαση και την άρνηση κάθε άτομου, ανά πιθανό κόσμο (γραμμή). Έτσι, το στοιχείο $z_1=2$ εκφράζει την πίστη μας στην κατάφαση ενός ατόμου με ένταση 2. Αντίστοιχα το στοιχείο $z_2=2+5i$, εκφράζει πίστη τόσο στην άρνηση, όσο και στην κατάφαση του εν λόγω ατόμου. Αυτό προφανώς είναι μία αντίφαση (άλλωστε $2+5i\in\mathbb{C}_*$). Εντούτοις, δεν μπορούμε εκ των προτέρων να απορρίψουμε την πληροφορία που μεταφέρει ο κόσμος (γραμμή) που περιέχει το στοιχείο αυτό. Μπορεί η αντίφαση να προέρχεται από κάποια λανθασμένη, αντιφατική ενημέρωση. Με δεδομένο ότι όλες οι αντιφατικές ενημερώσεις γίνονται αποδεκτές, δεν πρέπει να είμαστε απόλυτοι κατά την απόρριψη αντιφατικών ατόμων. Από την άλλη πλευρά, ένα μη αντιφατικό άτομο μπορεί να απέχει πολύ από τον πραγματικό κόσμο. Η πληροφορία «το άτομο α είναι αληθές με δείκτη αξιοπιστίας RF=2» θα μπορούσε κάλλιστα να έχει προέλθει από μία λανθασμένη μέτρηση. Μελλοντικές παρατηρήσεις μπορεί να μας αποδείξουν το λάθος μας, συνεπώς πρέπει να είμαστε προσεκτικοί κατά την αποδοχή της πληροφορίας αυτής.

Η κατάληξη των παραπάνω συλλογισμών είναι ότι δεν πρέπει να υπάρχει απόλυτη αποδοχή ή απόρριψη πληροφορίας. Μία γραμμή η οποία περιέχει κάποια αντίφαση είναι αντιφατική εξ ορισμού, αλλά οφείλουμε να λάβουμε υπόψη μας την περίπτωση η αντίφαση αυτή να έχει προέλθει από κάποια λανθασμένη ενημέρωση. Στην παρατήρηση αυτή οφείλεται και η ακαταλληλότητα του μετασχηματισμού TTI

για την παραγωγή της σχετιζόμενης με τον πίνακα γνώσης. Ο μετασχηματισμός TTI εξισώνει με την σταθερά F συλλήβδην κάθε γραμμή η οποία περιέχει έστω και μία αντίφαση. Ο μετασχηματισμός QT οφείλει να έχει την δυνατότητα να αφαιρεί κάποιες από τις αντιφάσεις (τις λιγότερο ισχυρές). Με αυτό τον τρόπο, οι λιγότερο αντιφατικοί πιθανοί κόσμοι θα μετατρέπονται σε μη αντιφατικούς, οπότε η εφαρμογή του μετασχηματισμού αυτού θα δίνει συνεπείς βάσεις γνώσης.

Έτσι για παράδειγμα η αντιφατική πληροφορία z_2=2+5i παραπάνω εκφράζει πίστη στην κατάφαση του ατόμου με δείκτη αξιοπιστίας 2 και πίστη στην άρνηση του ατόμου με δείκτη αξιοπιστίας 5. Για τις ανάγκες του μετασχηματισμού επερωτήσεων όμως, πρέπει να εκτιμήσουμε την πιθανότητα η αντίφαση να οφείλεται σε θόρυβο, ή γενικότερα σε κάποια λανθασμένη ενημέρωση. Έχοντας την πληροφορία z_2 πρέπει να απαντήσουμε στο ερώτημα αν η αντίφαση οφείλεται σε θόρυβο ή άλλο λάθος, ή αν είναι ουσιώδης αντίφαση, δηλαδή αν υποδεικνύει ότι ο συγκεκριμένος κόσμος δεν είναι κοντά στην πραγματικότητα και επομένως πρέπει να απορριφθεί.

Προκειμένου να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό θα συνδέσουμε κάθε αριθμό x+yi με κάποιον μη αρνητικό πραγματικό αριθμό ο οποίος θα αποτελεί *εκτίμηση της αξιοπιστίας* του στοιχείου. Έτσι, μεταξύ της πληροφορίας: «το άτομο α είναι αληθές με δείκτη αξιοπιστίας RF=2» και της πληροφορίας: «το άτομο α είναι αληθές με δείκτη αξιοπιστίας RF=200», άμεσα φαίνεται ότι η δεύτερη είναι σαφώς πιο αξιόπιστη, λόγω της μεγαλύτερης έντασης πεποίθησης (δείκτης αξιοπιστίας).

Στην προσπάθειά μας να επεκτείνουμε την παραπάνω συλλογιστική σε άλλους μιγαδικούς παρατηρούμε ότι τα πράγματα δεν είναι τόσο προφανή. Για παράδειγμα, οι αριθμοί 5+i, 500+30i, 2+2i κοκ, αναφέρονται σε αντιφατικές πληροφορίες αφού αποδέχονται και την άρνηση και την κατάφαση κάποιου ατόμου. Άρα θα πρέπει να έχουν μικρή αξιοπιστία. Ποιά όμως αντίφαση είναι ισχυρότερη; Ισοδυνάμως, ποιά πληροφορία είναι πιο αξιόπιστη;

Από την άλλη, ο μη αντιφατικός μιγαδικός 0,0001i, θα πρέπει να είναι πιο αξιόπιστος από τον αντιφατικό μιγαδικό 0,0001+1000i ή όχι; Στην πρώτη περίπτωση δεν έχουμε καθόλου αντίφαση, αλλά στην δεύτερη η σύγκριση μεταξύ της πεποίθησης μας στην κατάφαση και της αντίστοιχης πεποίθησης στην άρνηση του ατόμου είναι καταλυτική, τόσο που μπορούμε κάλλιστα να θεωρήσουμε την αντίφαση αμελητέα και να υποθέσουμε ότι ο συγκεκριμένος μιγαδικός περιέχει πληροφορία «σχεδόν ισοδύναμη» με την πληροφορία του μη αντιφατικού μιγαδικού αριθμού 1000i, ο οποίος είναι πιο αξιόπιστος από τον 0,0001i.

Εν γένει το πρόβλημα της εύρεσης της αξιοπιστίας ενός στοιχείου είναι αρκετά περίπλοκο. Αυτό που απαιτείται είναι ο ορισμός μίας συνάρτησης, την οποία θα συμβολίσουμε με RE, η οποία θα αναθέτει σε κάθε μιγαδικό αριθμό την αξιοπιστία του. Την συνάρτηση αυτή θα την ονομάσουμε *συνάρτηση αξιοπιστίας στοιχείου* (*element reliability function*). Ο ορισμός της κατάλληλης συνάρτησης

αξιοπιστίας είναι ένα αρκετά δύσκολο πρόβλημα, με το οποίο θα ασχοληθούμε στην επόμενη ενότητα.

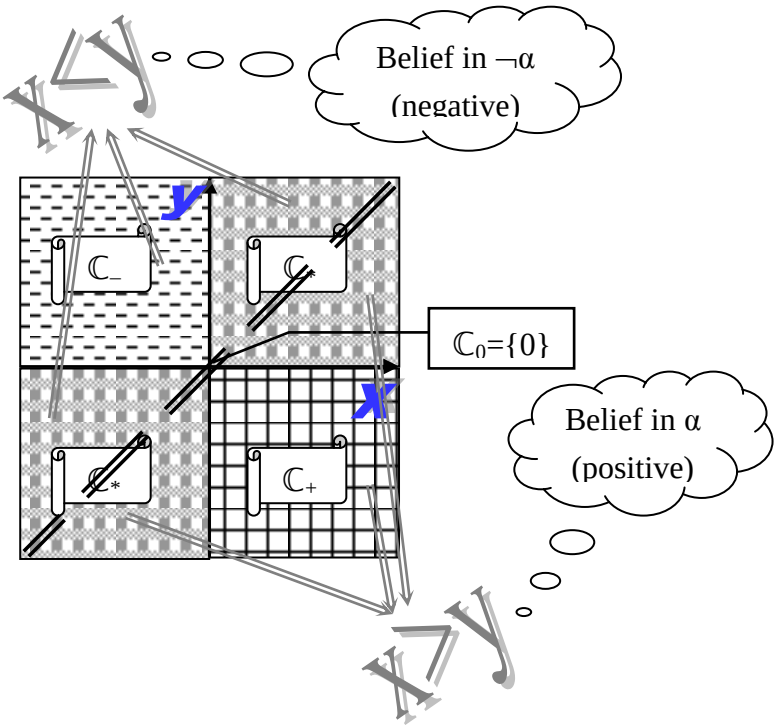
Δεν πρέπει εδώ να υπάρξει σύγχυση μεταξύ του δείκτη αξιοπιστίας (RF) και της αξιοπιστίας στοιχείου (RE). Καταρχήν, ο δείκτης αξιοπιστίας είναι μία ποσότητα (αριθμός) ενώ η αξιοπιστία στοιχείου είναι μία συνάρτηση. Επιπλέον, έχουν και διαφορετικό διαισθητικό νόημα: ο δείκτης αξιοπιστίας αναφέρεται στην ένταση της πεποίθησής μας ως προς την αλήθεια κάποιας πληροφορίας. Η αξιοπιστία στοιχείου αποτελεί ένα μέτρο της αντιφατικότητας ενός στοιχείου (ή μίας πληροφορίας), ή αλλιώς την προθυμία μας να άρουμε την αντίφαση την οποία εκφράζει. Αν το στοιχείο δεν είναι αντιφατικό (οπότε δεν υπάρχει αντίφαση για να αρθεί), τότε η συνάρτηση RE εκφράζει την προθυμία μας να δεχτούμε την αλήθεια της πληροφορίας που μεταφέρει το στοιχείο αυτό. Τέλος, ο δείκτης αξιοπιστίας είναι μία καθοριζόμενη από τον χρήστη ποσότητα, πιθανά μεταβαλλόμενη ανά ενημέρωση, ανά πιθανό κόσμο και ανά άτομο κάθε πιθανού κόσμου, ενώ η συνάρτηση αξιοπιστίας στοιχείου είναι μία συνάρτηση σταθερή και δεδομένη για το σύστημα, η οποία δεν αλλάζει και καθορίζεται κατά την αρχικοποίηση της βάσης από τον διαχειριστή του συστήματος.

Με την βοήθεια της συνάρτησης RE μπορούμε πλέον να αναθέσουμε στο κάθε στοιχείο κάποια αξιοπιστία. Ο ρόλος της συνάρτησης RL (αξιοπιστία γραμμής) είναι να συνθέσει τις αξιοπιστίες των στοιχείων της γραμμής ώστε να υπολογίσει την αξιοπιστία της. Το επόμενο βήμα είναι η επιλογή των πιο αξιόπιστων κόσμων μεταξύ των πιθανών. Το μόνο που μένει είναι η μετατροπή των επιλεγμένων κόσμων σε λογικές προτάσεις. Θυμίζουμε ότι οι επιλεγμένοι κόσμοι ενδέχεται να περιέχουν αντιφάσεις, άρα και πάλι η απευθείας χρήση της συνάρτησης TTI δεν θα μας βοηθήσει. Άρα λοιπόν εδώ χρειαζόμαστε μία ακόμα συνάρτηση μετατροπής των (πιθανά αντιφατικών) κόσμων σε μη αντιφατικές λογικές προτάσεις.

Ο ορισμός της συνάρτησης αυτής είναι σχετικά απλός. Ένα στοιχείο x+yi το οποίο αναφέρεται σε κάποιο άτομο α, υποδηλώνει πίστη στην κατάφαση του α με ένταση x και πίστη στην άρνηση του α με ένταση y. Η εύρεση του βέλτιστου τρόπου μετατροπής του στοιχείου αυτού έχει να κάνει πρακτικά με μια επιλογή μεταξύ της αποδοχής του α, της αποδοχής του ¬α ή της αποδοχής και των δύο.

Αν το στοιχείο είναι θετικό, αρνητικό ή μηδενικό, τότε η επιλογή μας είναι προφανής, αφού δεν υπάρχει καν αντίφαση. Στην περίπτωση που το στοιχείο είναι αντιφατικό, η απάντηση είναι και πάλι απλή. Έστω ότι έχουμε το αντιφατικό στοιχείο 5+i. Το στοιχείο αυτό εκφράζει δυο αλληλοαντικρουόμενες πεποιθήσεις (αντίφαση) με δείκτη αξιοπιστίας 5 και 1 για την κατάφαση και άρνηση του ατόμου αντίστοιχα. Για προφανείς λόγους είναι πολύ πιο πιθανό το λάθος να βρίσκεται στην πληροφορία μικρότερου δείκτη αξιοπιστίας, συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι το στοιχείο 5+i αντιστοιχεί στην κατάφαση του εν λόγω ατόμου (α). Με όμοιο τρόπο, αν έχουμε

το στοιχείο –5–i, έχουμε δυσπιστία τόσο στην κατάφαση του ατόμου (με ένταση 5) όσο και στην άρνηση του ατόμου (με ένταση 1). Άρα μας είναι πιο εύκολο να πιστέψουμε στην πρόταση «δεν πιστεύω στην κατάφαση του ατόμου» (ένταση 5) σε σχέση με την πρόταση «δεν πιστεύω στην άρνηση του ατόμου» (ένταση 1). Αυτό εμμέσως υποννοεί ότι δεν πιστεύουμε στην κατάφαση του ατόμου, άρα δεχόμαστε την άρνησή του. Συνοψίζοντας, και στις δύο περιπτώσεις, για ένα αντιφατικό στοιχείο x+yi αρκεί ένας έλεγχος της ισχύος της ανισότητας: x<y. Αν x<y δεχόμαστε την άρνηση του ατόμου, ενώ αν x>y δεχόμαστε την κατάφαση του ατόμου. Στην ειδική περίπτωση όπου x=y, δεν μπορούμε να επιλέξουμε άρα δεχόμαστε και την άρνηση και την κατάφαση του ατόμου, δηλαδή εξισώνουμε το στοιχείο x+yi με το μηδενικό στοιχείο. Εύκολα επιβεβαιώνεται ότι ο παραπάνω έλεγχος δουλεύει όχι μόνο για αντιφατικά στοιχεία, αλλά και για θετικά, αρνητικά ή το μηδενικό στοιχείο. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γεωμετρική ερμηνεία των παραπάνω.



Με την παραπάνω διαδικασία μπορούμε να πετύχουμε την μετατροπή των επιλεγμένων πιθανών κόσμων (γραμμών) σε μη αντιφατικές λογικές προτάσεις. Ένας από αυτούς (υποτίθεται ότι) είναι ο πραγματικός, συνεπώς παίρνοντας την διάζευξη των προτάσεων αυτών καταλήγουμε στην λογική πρόταση η οποία εκφράζει την γνώση της βάσης μας.

5.6 Ορισμός Μετασχηματισμού Επερωτήσεων

Στο παραπάνω μοντέλο εκτέλεσης του μετασχηματισμού επερωτήσεων, τον περιγράψαμε σαν μία ακολουθία βημάτων, στην οποία βρίσκουμε την αξιοπιστία κάθε πιθανού κόσμου, επιλέγουμε τους πιο αξιόπιστους, τους μετατρέπουμε σε μη αντιφατικούς και τελικά παίρνουμε την λογική πρόταση που προκύπτει από την διάζευξή τους. Είναι σαφές επομένως ότι η συνάρτηση (μετασχηματισμός) QT θα πρέπει να οριστεί σαν μία σύνθετη συνάρτηση. Δηλαδή μεταθέσαμε το πρόβλημα του ορισμού της QT στο πρόβλημα του ορισμού κάποιων απλούστερων συναρτήσεων από τις οποίες θα συνθέσουμε την QT.

Στο πρώτο βήμα του μετασχηματισμού επερωτήσεων απαιτήσαμε τον υπολογισμό της αξιοπιστίας των πιθανών κόσμων. Ο υπολογισμός αυτός θα γίνει

μέσω της συνάρτησης RL, αλλά προϋποθέτει τον ορισμό της συνάρτησης RE, η οποία υπολογίζει την αξιοπιστία του κάθε στοιχείου χωριστά. Ο ακριβής ορισμός της συνάρτησης RE είναι όπως είδαμε ένα δύσκολο πρόβλημα. Δεν είναι απόλυτα σαφές (στην γενική περίπτωση) το πότε ένα στοιχείο είναι πιο αξιόπιστο από κάποιο άλλο και πολύ περισσότερο η ακριβής τιμή της αξιοπιστίας κάθε στοιχείου. Για τον λόγο αυτό, ισχυριζόμαστε ότι δεν υπάρχει βέλτιστος και καθολικός τρόπος ορισμού της συνάρτησης αυτής, αλλά ότι ο σωστότερος ορισμός εξαρτάται από την εκάστοτε εφαρμογή την οποία η βάση γνώσης θα κληθεί να υποστηρίξει (σύστημα υποστήριξης αποφάσεων, σύστημα τεχνητής νοημοσύνης κοκ).

Από την άλλη βέβαια, υπάρχουν κάποιες ιδιότητες οι οποίες είναι προφανείς και καθολικές, υπό την έννοια ότι θα πρέπει να πληρούνται από κάθε «λογικό» ορισμό της συνάρτησης αξιοπιστίας στοιχείου. Στην παρούσα εργασία, προτιμήσαμε να μην προτείνουμε κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση αξιοπιστίας στοιχείου, αλλά να μελετήσουμε τις ιδιότητες τις οποίες θα πρέπει να πληρεί μία τέτοια συνάρτηση, ορίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο μία κλάση συναρτήσεων. Η ανεύρεση των «βέλτιστων» ανά εφαρμογή μελών αυτής της κλάσης, αποτελεί ένα ενδιαφέρον (και δύσκολο) πρόβλημα για μελλοντική εργασία, το οποίο απαιτεί εκτεταμένα πειράματα για την επίλυσή του.

Καταρχήν παρατηρούμε ότι ο συνδυασμός (σύνθεση) των συναρτήσεων RL και RE θα πρέπει να μας επιστρέφει έναν πίνακα στήλη, κάθε στοιχείο του οποίου θα είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός. Πάνω σε αυτόν τον πίνακα στήλη θα επιδράσει σε επόμενο στάδιο η συνάρτηση επιλογής γραμμών προκειμένου να επιλέξει τους πιο αξιόπιστους πιθανούς κόσμους. Με την ίδια λογική, η συνάρτηση RE θα πρέπει να «μετασχηματίζει» τον αρχικό πίνακα της βάσης σε έναν πίνακα από μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς. Στον πίνακα αυτό, κάθε στοιχείο θα ισούται με την αξιοπιστία του στοιχείου που βρίσκεται στην ίδια θέση στον αρχικό πίνακα (βάση). Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η επίδραση του μετασχηματισμού RE πάνω σε έναν πίνακα μιγαδικών.

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{m1} & z_{m2} & \dots & z_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{RE} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}, \; z_{ij} \in \mathbb{C}, \; x_{ij} = RE_0(z_{ij}) \in \mathbb{R}^{(+)}$$

Παρατηρούμε ότι το κάθε x_{ij} στο παραπάνω σχήμα οφείλει να είναι μία συνάρτηση του αντίστοιχου στοιχείου z_{ij}. Αυτό συμβαίνει διότι προφανώς η αξιοπιστία ενός στοιχείου είναι ανεξάρτητη των υπολοίπων στοιχείων του πίνακα. Για να εκφράσουμε το γεγονός αυτό ορίζουμε μία δεύτερη συνάρτηση, την RE_0 (όπως

φαίνεται και στο σχήμα), η οποία επιδρά πάνω στον μιγαδικό z_{ij} και επιστρέφει την αξιοπιστία του. Έτσι για ένα πίνακα $A=[z_{ij}]$, θα έχουμε ότι $RE(A)=[RE_0(z_{ij})]$.

Μένει να μελετήσουμε τις ιδιότητες τις συνάρτησης RE_0. Αυτή η συνάρτηση υπολογίζει την αξιοπιστία του κάθε στοιχείου χωριστά και είναι το βασικό συστατικό στοιχείο της συνάρτησης RE. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αξιοπιστίας στοιχείου ορίζεται για μιγαδικούς αριθμούς, άρα το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο $\mathbb{C}$. Το αποτέλεσμα μίας τέτοιας συνάρτησης οφείλει να είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός, δηλαδή ένας αριθμός του συνόλου $\mathbb{R}^{(+)}$.

Καταρχήν οφείλουμε να είμαστε αμερόληπτοι ως προς τα καταφατικά και αρνητικά άτομα. Ισοδυνάμως, για ένα μιγαδικό $z=x+yi$, δεν πρέπει να παίζει ρόλο ποιό από τα x, y αναφέρεται στο πραγματικό και ποιό στο φανταστικό μέρος του z (ή ισοδύναμα στην κατάφαση/άρνηση του αντίστοιχου ατόμου). Με μαθηματικούς όρους, οι αριθμοί $x+yi$ και $y+xi$, οφείλουν να έχουν την ίδια αξιοπιστία.

Παρόμοιες παρατηρήσεις ισχύουν και για τους αριθμούς $x+yi$ και $–x–yi$. Κατά την ανάπτυξη της συλλογιστικής μας σχετικά με την αναπαράσταση της «εμπιστοσύνης» μας στην αλήθεια/ψεύδος ενός ατόμου με την βοήθεια μιγαδικών αριθμών, είχαμε ορίσει αρχικά τον δείκτη αξιοπιστίας σαν ένα θετικό πραγματικό αριθμό ($RF>0$). Στην συνέχεια υποχρεωθήκαμε για τεχνικούς λόγους να επεκτείνουμε τον ορισμό του δείκτη αξιοπιστίας ώστε να δέχεται και αρνητικές τιμές ή το 0. Έτσι, η πληροφορία ενός δείκτη αξιοπιστίας $x\in\mathbb{R}$ είναι διττή: το πρόσημό του μας δείχνει το αν αναφέρεται σε πίστη ή δυσπιστία στην αλήθεια της κατάφασης/άρνησης του ατόμου ενώ το μέτρο του (απόλυτη τιμή: $|x|$) μας δείχνει την αξιοπιστία της πηγής πληροφορίας. Όμως, η αξιοπιστία στοιχείου (συνάρτηση RE) εκφράζει την προθυμία αποδοχής της πληροφορίας που περιέχει ο μιγαδικός που αντιστοιχεί στο εν λόγω άτομο, συνεπώς εξαρτάται από την αξιοπιστία της πηγής πληροφορίας, η οποία είναι ανεξάρτητη του προσήμου του αριθμού x και εξαρτάται μόνο από την ποσότητα $|x|$.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι για τυχαίους $x,y\in\mathbb{R}$, θα πρέπει να ισχύει: $RE_0(x+yi)=RE_0(–x+yi)=RE_0(x–yi)=RE_0(–x–yi)$. Μία προσεκτικότερη ματιά όμως θα μας δείξει ότι κάτι τέτοιο δεν είναι απόλυτα σωστό. Ας υποθέσουμε ότι οι x, y είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Τότε το στοιχείο $x+yi$ είναι αντιφατικό. Από την άλλη, τα στοιχεία $–x+yi$, $x–yi$ είναι μη αντιφατικά. Στην πραγματικότητα, στον αριθμό $–x+yi\in\mathbb{C}_-$ το φανταστικό του μέρος ($y>0$) μας προτρέπει να πιστέψουμε στην άρνηση του αντίστοιχου ατόμου, ενώ το πραγματικό του μέρος ($–x<0$) αντί να αντιφάσκει με το παραπάνω γεγονός, ενισχύει την ήδη διαμορφωμένη άποψη ότι η άρνηση του ατόμου είναι αληθής. Αντίστοιχες παρατηρήσεις ισχύουν για το στοιχείο $x–yi\in\mathbb{C}_+$. Άρα λοιπόν δεν είναι λογικό να απαιτήσουμε την αλήθεια του ισχυρισμού: $RE_0(x+yi)=RE_0(–x+yi)$ ή του:

$RE_0(x+yi)=RE_0(x-yi)$. Με ανάλογη ανάλυση, καταλήγουμε σε παρόμοια συμπεράσματα για την περίπτωση όπου ένα από τα x, y (ή και τα δύο) είναι αρνητικά ή ίσα με μηδέν.

Το λάθος των ισχυρισμών $RE_0(x+yi)=RE_0(-x+yi)$ και $RE_0(x+yi)=RE_0(x-yi)$ οφείλεται στην διαφορετική σημασιολογία των απόλυτων τιμών των x, y ($|x|$, $|y|$) όταν αλλάζουμε το πρόσημό τους (από πίστη σε κάτι, δυσπιστία σε αυτό και αντίστροφα). Έτσι όταν αλλάξουμε το πρόσημο μόνο του ενός από τα x, y – όπως στις δύο παραπάνω περιπτώσεις – αλλάζει και η συσχέτιση μεταξύ του πραγματικού και φανταστικού μέρους του μιγαδικού (από αντίφαση σε συμφωνία και αντίστροφα). Αυτό όμως δεν ισχύει όταν αλλάξουμε το πρόσημο και των δύο, άρα λοιπόν καταρχήν φαίνεται λογικό να απαιτήσουμε την αλήθεια του ισχυρισμού: $RE_0(x+yi)=RE_0(-x-yi)$ ή ισοδύναμα: $RE_0(z)=RE_0(-z)$.

Πράγματι, από την κατάτμηση των μιγαδικών σε θετικούς, αρνητικούς και αντιφατικούς παρατηρούμε ότι ο $-z$ είναι αντιφατικός αν και μόνο αν ο z είναι αντιφατικός (δηλαδή $z\in\mathbb{C}_*\Leftrightarrow -z\in\mathbb{C}_*$). Επίσης, ισχύει $z\in\mathbb{C}_+\Leftrightarrow -z\in\mathbb{C}_-$. Αν λοιπόν αλλάξουμε το πρόσημο και του πραγματικού και του φανταστικού μέρους του μιγαδικού z ($z \to -z$), τότε το πραγματικό μέρος του $-z$ θα είναι σε αντίφαση με το φανταστικό μέρος του $-z$ αν και μόνο το πραγματικό μέρος του z είναι σε αντίφαση με το φανταστικό μέρος του z. Αντίστοιχα, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του $-z$ θα είναι σε συμφωνία (δηλαδή δεν θα υπάρχει αντίφαση) αν και μόνο αν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του z είναι σε συμφωνία. Τελικά δηλαδή, για κάθε «λογικό» ορισμό της RE_0 θα πρέπει να ισχύει $RE_0(z)=RE_0(-z)$, $\forall z\in\mathbb{C}$.

Συνοψίζοντας τους παραπάνω συλλογισμούς καταλήξαμε στον ορισμό:

Ορισμός 5.1

Μία συνάρτηση $RE_0:\mathbb{C}\to\mathbb{R}^{(+)}$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{F}_{RE0}$ των *στοιχειωδών συναρτήσεων αξιοπιστίας στοιχείου* (*primitive element reliability functions*) αν και μόνο αν η RE_0 έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Για κάθε $z\in\mathbb{C}$: $Re(z)=x$, $Im(z)=y$, ισχύει η σχέση: $RE_0(x+yi)=RE_0(y+xi)$ (συμμετρία ως προς τον πρώτο διαγώνιο άξονα)
- Για κάθε $z\in\mathbb{C}$ ισχύει η σχέση: $RE_0(z)=RE_0(-z)$ (συμμετρία ως προς το σημείο 0)

Μία συνάρτηση $RE:\mathbb{C}^{*\times n}\to\mathbb{R}^{(+)*\times n}$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{F}_{RE}$ των *συναρτήσεων αξιοπιστίας στοιχείου* (*element reliability functions*) αν και μόνο αν υπάρχει κάποια συνάρτηση $RE_0\in\mathcal{F}_{RE0}$ για την οποία για κάθε $A\in\mathbb{C}^{*\times n}$, $A=[z_{kj}]$, να ισχύει η σχέση: $RE(A)=[RE_0(z_{kj})]$.

Έχοντας ορίσει την συνάρτηση αξιοπιστίας στοιχείου μπορούμε να προχωρήσουμε στον ορισμό της συνάρτησης αξιοπιστίας γραμμής. Η συλλογιστική είναι παρόμοια και εδώ. Ο ορισμός της συνάρτησης RL είναι αρκετά δύσκολος, οπότε θα προτιμήσουμε τον ορισμό μίας κλάσης συναρτήσεων, αντί να προτείνουμε κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση. Ο ορισμός της βέλτιστης μέσα από αυτήν την κλάση είναι ένα ενδιαφέρον πρόβλημα για μελλοντική εργασία, όπως και στην περίπτωση της συνάρτησης RE, και πιθανότατα εξαρτάται από την εφαρμογή.

Η αξιοπιστία μίας γραμμής (πρέπει να) εξαρτάται από τις αξιοπιστίες του κάθε στοιχείου της γραμμής αυτής και από τίποτα άλλο. Με δεδομένο ότι η συνάρτηση RE επιστρέφει έναν πίνακα στον οποίο υπάρχει η αξιοπιστία κάθε στοιχείου του αρχικού πίνακα της βάσης ο ρόλος της συνάρτησης RL είναι να συνθέτει με κάποιο τρόπο τις αξιοπιστίες της κάθε γραμμής δίνοντας έναν μη αρνητικό πραγματικό ως αποτέλεσμα. Η επίδραση της RL φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{RL} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_m \end{bmatrix}, \; x_{ij} \in \mathbb{R}^{(+)}, \; r_i = RL_0(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}) \in \mathbb{R}^{(+)}$$

Παρατηρείστε ότι χρησιμοποιείται και εδώ η ίδια τεχνική, ορίζοντας μία δεύτερη συνάρτηση RL_0 η οποία επιδρά σε κάθε γραμμή χωριστά, και μέσω της οποίας ορίζεται η συνάρτηση RL. Η RL_0 έχει σαν πεδίο ορισμού μία n-άδα μη αρνητικών πραγματικών και επιστρέφει έναν μη αρνητικό πραγματικό, ο οποίος αντιπροσωπεύει την αξιοπιστία της εν λόγω γραμμής (n-άδας).

Ως προς τις ιδιότητες της RL_0 μπορούμε να παρατηρήσουμε καταρχήν ότι η αξιοπιστία μίας γραμμής δεν πρέπει να εξαρτάται από την σειρά με την οποία εμφανίζονται οι αξιοπιστίες του κάθε στοιχείου στην γραμμή αυτή. Με άλλα λόγια, η διάταξη της n-άδας πάνω στην οποία επιδρά η RL_0 πρέπει να μην επηρρεάζει το αποτέλεσμα. Αυτό έχει ένα σαφές διαισθητικό νόημα, αφού αν η διάταξη έπαιζε ρόλο τότε θα υπήρχε αυτόματα μία μεροληψία ως προς κάποια άτομα. Δηλαδή μεταθέτωντας την θέση των ατόμων (άρα και των αντίστοιχών τους στοιχείων) στον αρχικό πίνακα της βάσης θα παίρναμε διαφορετική αξιοπιστία για κάθε γραμμή, κάτι μάλλον παράλογο.

Κατά δεύτερον, αυξάνοντας την αξιοπιστία ενός οποιουδήποτε στοιχείου κάποιας γραμμής θα πρέπει να αυξάνεται (ή τουλάχιστον να μένει σταθερή) και η αξιοπιστία της γραμμής η οποία το περιέχει. Και η ιδιότητα αυτή είναι προφανής. Η αξιοπιστία στοιχείου συμβολίζει την προθυμία μας να αποδεχτούμε την πληροφορία που περιέχει ένα άτομο και κατ' επέκταση και του πιθανού κόσμου που το περιέχει.

Το να μειώνεται η αξιοπιστία ενός πιθανού κόσμου αυξανομένης της αξιοπιστίας των ατόμων του είναι κάτι μη επιθυμητό.

Συνοψίζοντας, για τις συναρτήσεις αξιοπιστίας γραμμής έχουμε τον ορισμό:

Ορισμός 5.2

Μία συνάρτηση $RL_0:\mathbb{R}^{(+)1\times n}\to\mathbb{R}^{(+)}$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{F}_{RL0}$ των *στοιχειωδών συναρτήσεων αξιοπιστίας γραμμής* (*primitive line reliability functions*) αν και μόνο αν η RL_0 έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Για κάθε $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^{(+)}$ και κάθε $j,k\in\{1,2,\ldots,n\}$, ώστε $j<k$, ισχύει η σχέση: $RL_0(x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_k,\ldots,x_n)=RL_0(x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots,x_j,\ldots,x_n)$ (οποιαδήποτε μετάθεση των δεικτών των x_j δεν μεταβάλλει το αποτέλεσμα της RL_0)
- Για κάθε $x,y,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^{(+)}$, ώστε $x\geq y$, ισχύει η σχέση: $RL_0(x,x_2,\ldots,x_n)\geq RL_0(y,x_2,\ldots,x_n)$ (η RL_0 είναι αύξουσα ως προς την πρώτη μεταβλητή της)

Μία συνάρτηση $RL:\mathbb{R}^{(+)*\times n}\to\mathbb{R}^{(+)*\times 1}$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{F}_{RL}$ των *συναρτήσεων αξιοπιστίας γραμμής* (*line reliability functions*) αν και μόνο αν υπάρχει κάποια συνάρτηση $RL_0\in\mathcal{F}_{RL0}$ για την οποία για κάθε $m\in\mathbb{N}^*$, $A\in\mathbb{R}^{(+)m\times n}$, $A=A^{(1)}|A^{(2)}|\ldots|A^{(m)}$, $A^{(j)}\in\mathbb{R}^{(+)1\times n}$, $j=1,2,\ldots,m$, να ισχύει η σχέση:
$RL(A)=[RL_0(A^{(1)})]\,|\,[RL_0(A^{(2)})]\,|\ldots|\,[RL_0(A^{(m)})]$.

Οι παραπάνω ιδιότητες για την κλάση $\mathcal{F}_{RL0}$ δείχνουν ασθενέστερες αυτών που απαιτήσαμε, με την έννοια ότι αρκεστήκαμε να ισχύει $j<k$ στην πρώτη ιδιότητα ενώ στην δεύτερη απαιτήσαμε μονοτονία μόνο ως προς την πρώτη μεταβλητή. Η παρακάτω πρόταση δείχνει όμως ότι οι απαιτήσεις μας είναι στην πράξη ισοδύναμες αυτών του ορισμού 5.2:

Πρόταση 5.1

Έστω συνάρτηση f, τέτοια ώστε $f\in\mathcal{F}_{RL0}$. Τότε ισχύουν οι ιδιότητες:

- Έστω $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^{(+)}$ και $x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(n)}$ μία οποιαδήποτε μετάθεση των $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Τότε: $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(n)})$.
- Η συνάρτηση f είναι αύξουσα ως προς κάθε μεταβλητή της.

Απόδειξη

Για την πρώτη ιδιότητα, έστω ότι $x^{(1)}=x_j$, όπου $j\in\{1,2,\ldots,n\}$.
Αν $j=1$ τότε: $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f(x^{(1)},x_2,\ldots,x_n)$.
Αν $j>1$ τότε: $f(x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_n)=f(x_j,x_2,\ldots,x_1,\ldots,x_n)=f(x^{(1)},x_2,\ldots,x_1,\ldots,x_n)$.
Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία για τα $x^{(2)},\ldots,x^{(n)}$, οπότε τελικά παίρνουμε ότι $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(n)})$.

Για την δεύτερη ιδιότητα, έστω ότι η f δεν είναι αύξουσα ως προς την μεταβλητή υπ' αριθμόν j, $j\in\{1,2,\ldots,n\}$. Τότε υπάρχουν $x_1,x_2,\ldots,x_{j-1},x,y,x_{j+1},\ldots,x_n\in\mathbb{R}^{(+)}$, $x\geq y$, ώστε:
$f(x_1,x_2,\ldots,x_{j-1},x,x_{j+1},\ldots,x_n)<f(x_1,x_2,\ldots,x_{j-1},y,x_{j+1},\ldots,x_n)$.
Όμως:
$f(x_1,x_2,\ldots,x_{j-1},x,x_{j+1},\ldots,x_n)=f(x,x_2,\ldots,x_{j-1},x_1,x_{j+1},\ldots,x_n)\geq$
$\geq f(y,x_2,\ldots,x_{j-1},x_1,x_{j+1},\ldots,x_n)=f(x_1,x_2,\ldots,x_{j-1},y,x_{j+1},\ldots,x_n)$ άτοπο.
Η απόδειξη είναι πλήρης.

Με την βοήθεια των πράξεων RE και RL έχουμε μετασχηματίσει τον πίνακα της βάσης σε ένα πίνακα στήλη, του οποίου κάθε στοιχείο αντιπροσωπεύει την αξιοπιστία της κάθε γραμμής (πιθανού κόσμου) του αρχικού πίνακα. Χρειαζόμαστε στην συνέχεια μία συνάρτηση η οποία θα επιλέγει μεταξύ των γραμμών αυτών τις πιο αξιόπιστες. Την συνάρτηση αυτή την ονομάζουμε *συνάρτηση επιλογής γραμμών* (*line selection function*) και την συμβολίζουμε με LS.

Αν και φαίνεται προφανές ότι θα πρέπει να επιλεγούν οι πιο αξιόπιστες γραμμές, δεν είναι καθόλου προφανές το *πόσες* γραμμές θα πρέπει να επιλεγούν. Σε άλλες εφαρμογές μπορεί να ενδιαφερόμαστε για έναν μόνο κόσμο (τον πιο αξιόπιστο) ενώ σε άλλες μπορεί να μας ενδιαφέρουν όλοι οι πιθανοί κόσμοι, ακόμα και αυτοί που δείχνουν πολύ μακριά από την πραγματικότητα. Φυσικά υπάρχουν και πολλές ενδιάμεσες περιπτώσεις. Μπορεί επίσης να μας ενδιαφέρουν μόνο οι κόσμοι με αξιοπιστία μεγαλύτερη από κάποιο συγκεκριμένο αριθμό.

Προκειμένου να αφήσουμε στον διαχειριστή του συστήματος την ελευθερία να παραμετροποιήσει το πλήθος των γραμμών προς επιλογή, επιλέξαμε για τρίτη φορά την προσέγγιση των κλάσεων συναρτήσεων. Στην προκειμένη περίπτωση, ορίσαμε την κλάση των συναρτήσεων επιλογής γραμμών. Μία συνάρτηση επιλογής γραμμών επιλέγει ένα σύνολο γραμμών μεταξύ των γραμμών του πίνακα, ή ισοδυνάμως για ένα πίνακα βάσης του συνόλου $\mathbb{C}^{m\times n}$ (δηλαδή πίνακα με m γραμμές) επιλέγεται ένα σύνολο δεικτών, υποσύνολο του $\{1,2,...,m\}$. Μία προφανής απαίτηση είναι το σύνολο αυτό να είναι διαφορετικό του κενού συνόλου (δηλαδή να περιέχει τουλάχιστον ένα δείκτη). Η συνάρτηση LS πρέπει να επιδρά πάνω στον πίνακα στήλη που προέκυψε από την εφαρμογή της RL. Έτσι λοιπόν ορίζουμε την αντίστοιχη κλάση συναρτήσεων ως εξής:

Ορισμός 5.3

Μία συνάρτηση $LS:\mathbb{R}^{(+)*\times 1}\rightarrow P(\mathbb{N}^*)$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{F}_{LS}$ των *συναρτήσεων επιλογής γραμμών* (*line selection functions*) αν και μόνο αν για κάθε $k\in\mathbb{N}^*$ και $A\in\mathbb{R}^{(+)k\times 1}$ ισχύει ότι $\varnothing\subset LS(A)\subseteq\{1,2,\ldots,k\}$.

Ο μοναδικός περιορισμός του παραπάνω ορισμού είναι το σύνολο των δεικτών που επιλέγονται να είναι μη κενό και να έχει δείκτες οι οποίοι να έχουν νόημα για τον εν λόγω πίνακα. Θα μπορούσαμε να ορίσουμε επιπλέον ιδιότητες οι οποίες να μας εξασφαλίζουν την επιλογή των πιο αξιόπιστων γραμμών. Για λόγους πειραματισμού όμως προτιμήσαμε να αφήσουμε την επιλογή αυτή ανοικτή. Έτσι, μπορεί κάποιος να επιθυμεί να βρει μέσα από ένα πίνακα τους πιο «απίθανους» πιθανούς κόσμους, ή να επιλέγει ένα τυχαίο υποσύνολο κόσμων για μία μελέτη του πώς διαμορφώνεται η γνώση όταν επιλέγονται τυχαίες πεποιθήσεις προς απόρριψη/αποδοχή. Όλα αυτά είναι επιτρεπτά από τον ορισμό της κλάσης των συναρτήσεων επιλογής γραμμών.

Η επιλογή των δεικτών που επιστρέφει η συνάρτηση LS μπορεί πλέον άμεσα να χρησιμοποιηθεί ώστε να πάρουμε από τον αρχικό πίνακα βάσης τον υποπίνακα ο οποίος περιέχει μόνο της γραμμές της επιλογής μας. Εδώ η συνάρτηση που εκτελεί την διαδικασία αυτή είναι σαφώς καθορισμένη και είναι η εξής:

Ορισμός 5.4

Ορίζουμε την *συνάρτηση επιλογής υποπίνακα* (*submatrix selection function*) $MS:\mathbb{C}^{*\times n}\times P(\mathbb{N}^*)\to\mathbb{C}^{*\times n}$, ως εξής:

για κάθε $S\subseteq\mathbb{N}^*$, $k\in\mathbb{N}^*$, $A\in\mathbb{C}^{k\times n}$, ώστε $A=A^{(1)}|A^{(2)}|...|A^{(k)}$, $A^{(j)}\in\mathbb{C}^{1\times n}$, j=1,2,…,k, ορίζουμε:

$MS(A,S)=A$, αν $S=\varnothing$ ή $\exists m\in S: m>k$

$MS(A,S)=\underset{j\in S}{|}A^{(j)}$, διαφορετικά.

Η συνάρτηση MS στην γενική περίπτωση επιλέγει από το σύνολο των γραμμών ενός πίνακα $A\in\mathbb{C}^{k\times n}$ ένα υποσύνολο αυτού, το $S\subseteq\{1,2,\ldots,k\}$ και παραθέτει τις γραμμές των οποίων ο δείκτης είναι μέσα από το σύνολο S. Στις ειδικές περιπτώσεις όπου το σύνολο S δεν περιέχει κανένα δείκτη ($S=\varnothing$) ή που το S περιέχει δείκτες εκτός του συνόλου {1,2,...,k} ορίζουμε το αποτέλεσμα της συνάρτησης να είναι ο πίνακας A. Στην παρούσα εφαρμογή, το όρισμα S της συνάρτησης MS είναι το αποτέλεσμα της εφαρμογής της συνάρτησης LS πάνω στον πίνακα στήλη που αντιπροσωπεύει τις αξιοπιστίες των πιθανών κόσμων του πίνακα της βάσης. Από τον ορισμό των διάφορων συναρτήσεων και το γεγονός ότι η συνάρτηση $LS\in\mathcal{F}_{LS}$, έπεται ότι το σύνολο S θα είναι πάντοτε διάφορο του $\varnothing$ και υποσύνολο του {1,2,...,k}. Συνεπώς, η ειδική περίπτωση παραπάνω δεν θα χρειαστεί πουθενά και εισήχθηκε για λόγους πληρότητας ορισμού και μόνο.

Ο υποπίνακας που προέκυψε από την εφαρμογή της συνάρτησης MS είναι πιθανό να περιέχει αντιφατικές γραμμές. Για τους λόγους που περιγράψαμε

παραπάνω, πρέπει να άρουμε τις αντιφάσεις των γραμμών αυτών πριν τις μετατρέψουμε σε λογικές προτάσεις. Προκειμένου να γίνει αυτό, αρκεί για κάθε στοιχείο $z=x+yi\in\mathbb{C}$ του υποπίνακα $A'\in\mathbb{C}^{*\times n}$ να ελέγξουμε την σχέση των x, y: αν ισχύει $x<y$ τότε πρέπει να επιλεγεί η άρνηση του ατόμου, αν $x>y$ τότε επιλέγεται η κατάφαση του ατόμου, ενώ αν $x=y$ επιλέγεται και η άρνηση και η κατάφαση. Η παραπάνω διαδικασία αποτελείται στην πραγματικότητα από δύο βήματα: το πρώτο είναι η *κανονικοποίηση* του πίνακα Α′, ώστε να αρθούν οι τυχόν αντιφάσεις και το δεύτερο η εφαρμογή της γνωστής συνάρτησης TTI πάνω στον κανονικοποιημένο πίνακα ώστε να πάρουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Προκειμένου να ορίσουμε την πρώτη συνάρτηση, την *συνάρτηση κανονικοποίησης πίνακα* (*matrix normalization function*), την οποία θα συμβολίζουμε με MN, κάνουμε την εξής σκέψη: έστω ότι $x<y\Leftrightarrow x-y<0\Leftrightarrow x-y\in\mathbb{C}_-\backslash\mathbb{C}_+$. Ομοίως, αν $x>y\Leftrightarrow x-y>0\Leftrightarrow x-y\in\mathbb{C}_+\backslash\mathbb{C}_-$ και αν $x=y\Leftrightarrow x-y=0\Leftrightarrow x-y\in\mathbb{C}_0$. Έστω λοιπόν ο πίνακας $A'=[z_{kj}]=[x_{kj}+y_{kj}i]$. Αν μετατρέψουμε κάθε στοιχείο $x_{kj}+y_{kj}i$ του πίνακα Α′ στο στοιχείο $x_{kj}-y_{kj}$, θα πάρουμε τον πίνακα $A''=[x_{kj}-y_{kj}]$. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ισοδυναμίες και τον ορισμό της συνάρτησης TTI παρατηρούμε ότι αν στον πίνακα Α′ ισχύει $x_{kj}>y_{kj}$ τότε το στοιχείο στην θέση (k,j) του Α′′ θα ανήκει στο σύνολο $\mathbb{C}_+\backslash\mathbb{C}_-$, οπότε ο διαζευκτικός όρος υπ' αριθμόν k του αποτελέσματος της TTI θα περιέχει το άτομο α_j σαν κατάφαση, δηλαδή θα έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα. Ομοίως για τις περιπτώσεις $x_{kj}<y_{kj}$ και $x_{kj}=y_{kj}$.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό για την συνάρτηση κανονικοποίησης πίνακα:

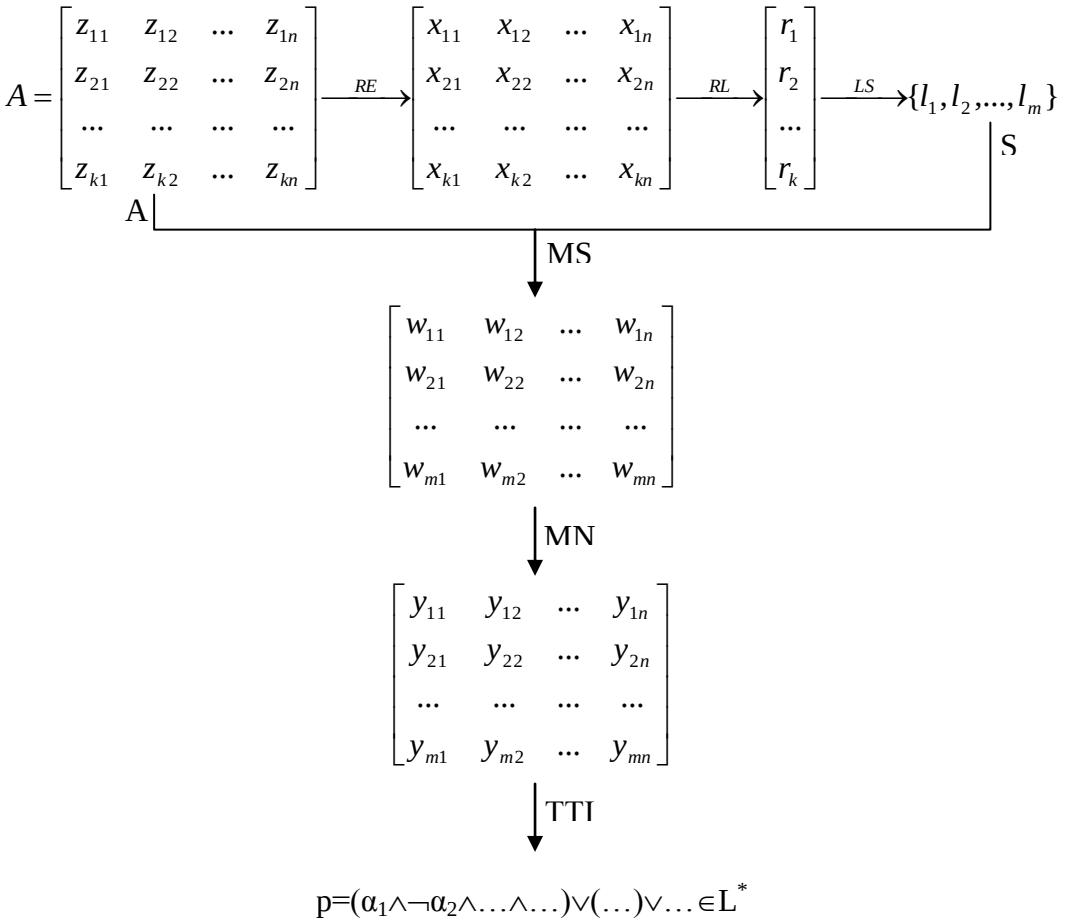
Ορισμός 5.5

Ορίζουμε την *συνάρτηση κανονικοποίησης πίνακα* (*matrix normalization function*), $MN:\mathbb{C}^{*\times n}\rightarrow\mathbb{C}^{*\times n}$ ως εξής:

για κάθε $A\in\mathbb{C}^{*\times n}$, ώστε $A=[z_{kj}]=[x_{kj}+y_{kj}i]\in\mathbb{C}^{*\times n}$, ορίζουμε:

$MN(A)=[x_{kj}-y_{kj}]\in\mathbb{C}^{*\times n}$.

Είναι σαφές από την παραπάνω ανάλυση ότι η εφαρμογή της συνάρτησης TTI πάνω στο αποτέλεσμα της κανονικοποίησης θα μας δώσει το επιθυμητό αποτέλεσμα (λογική πρόταση). Συνοψίζοντας τα παραπάνω, έχουμε ότι για να μετατρέψουμε ένα πίνακα γνώσης, έστω τον $A\in\mathbb{C}^{k\times n}$, σε λογική πρόταση κατάλληλη για εκτέλεση επερωτήσεων, εφαρμόζουμε σειριακά τα βήματα που συνθέτουν τον μετασχηματισμό QT. Τα βήματα αυτά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



$$p=(\alpha_1\wedge\neg\alpha_2\wedge\ldots\wedge\ldots)\vee(\ldots)\vee\ldots\in L^*$$

Αναλυτικά, ο μετασχηματισμός QT αποτελείται από έξι βήματα τα οποία είναι τα εξής:

1) Εφαρμογή της οριζόμενης από τον διαχειριστή του συστήματος συνάρτησης $RE\in\mathcal{F}_{RE}$ (ορισμός 5.1) στον πίνακα A, με αποτέλεσμα τον πίνακα $B=RE(A)\in\mathbb{R}^{(+)k\times n}$. Ο πίνακας B δείχνει την αξιοπιστία του κάθε στοιχείου του αρχικού πίνακα A.
2) Εφαρμογή της οριζόμενης από τον διαχειριστή του συστήματος συνάρτησης $RL\in\mathcal{F}_{RL}$ (ορισμός 5.2) στον πίνακα B, με αποτέλεσμα τον πίνακα $C=RL(B)\in\mathbb{R}^{(+)k\times 1}$. Ο πίνακας C δείχνει την αξιοπιστία κάθε γραμμής (πιθανού κόσμου) του αρχικού πίνακα A.
3) Εφαρμογή της οριζόμενης από τον διαχειριστή του συστήματος συνάρτησης $LS\in\mathcal{F}_{LS}$ (ορισμός 5.3) στον πίνακα C, με αποτέλεσμα το σύνολο $S=LS(C)\in P(\mathbb{N}^*)$, $\varnothing\subset S\subseteq\{1,2,\ldots,k\}$. Το σύνολο S είναι το σύνολο των δεικτών των γραμμών οι οποίες θα επιλεγούν ως πιο αξιόπιστες από τον αρχικό πίνακα A.
4) Εφαρμογή της συνάρτησης MS (ορισμός 5.4) στον αρχικό πίνακα γνώσης A και το σύνολο S, με αποτέλεσμα τον πίνακα $D=MS(A,S)\in\mathbb{C}^{m\times n}$, για κάποιο $m\in\mathbb{N}^*$,

$m=|S|\leq k$. Ο πίνακας D είναι υποπίνακας του αρχικού πίνακα A και περιέχει τις πιο αξιόπιστες γραμμές (πιθανούς κόσμους) του αρχικού πίνακα A, όπως αυτές επιλέχθηκαν από την συνάρτηση LS παραπάνω (βήμα #3).

5) Εφαρμογή της συνάρτησης MN (ορισμός 5.5) στον πίνακα D, με αποτέλεσμα τον πίνακα $E=MN(D)\in\mathbb{C}^{m\times n}$. Ο πίνακας E είναι ο κανονικοποιημένος πίνακας που αντιστοιχεί στον πίνακα D και δεν περιέχει αντιφάσεις (αντιφατικά στοιχεία).
6) Εφαρμογή του αντίστροφου μετασχηματισμού πινάκων TTI (ορισμός 4.12) πάνω στον πίνακα E, με αποτέλεσμα την λογική πρόταση $p=TTI(E)\in L^*$. Η λογική πρόταση $p\in L^*$ αντιπροσωπεύει την γνώση που περιέχει ο αρχικός πίνακας γνώσης A και είναι η έκφραση πάνω στην οποία θα εκτελεστούν τυχόν επερωτήσεις του χρήστη. Ισχύει δηλαδή ότι $p=QT(A)$.

5.7 Παράδειγμα Εφαρμογής Μετασχηματισμού Επερωτήσεων

Σαν ένα απλό παράδειγμα εφαρμογής του μετασχηματισμού, ας δούμε σε ποιά λογική πρόταση αντιστοιχεί ο πίνακας K_2:

$$K_2=\begin{bmatrix}1+i & i\\ 1 & 1+i\end{bmatrix}$$

τον οποίο είχαμε αντιμετωπίσει στο παράδειγμα αναθεώρησης που μελετήσαμε. Όπως είχαμε δει, ο πίνακας είναι αντιφατικός και $TTI(K_2)\cong F$. Έχουμε ότι για τον $K_2=[z_{kj}]$, ισχύει: $z_{11}=1+i$, $z_{12}=i$, $z_{21}=1$, $z_{22}=1+i$. Είναι σαφές ότι ανεξάρτητα από την επιλογή των συναρτήσεων RE και RL ισχύει (λόγω των ιδιοτήτων που απαιτήσαμε):
$RE_0(z_{11})=RE_0(1+i)=RE_0(z_{22})$,
$RE_0(z_{12})=RE_0(i)=RE_0(0+1i)=RE_0(1+0i)=RE_0(1)=RE_0(z_{21})$.
Έστω R_1 η αξιοπιστία της γραμμής 1, και R_2 η αξιοπιστία της γραμμής 2. Τότε:
$R_1=RL_0(RE_0(z_{11}),RE_0(z_{12}))=RL_0(RE_0(z_{22}),RE_0(z_{21}))=RL_0(RE_0(z_{21}),RE_0(z_{22}))=R_2$.
Δηλαδή οι δύο γραμμές του πίνακα έχουν την ίδια αξιοπιστία ανεξαρτήτως επιλογής των συναρτήσεων RE, RL. Αυτό ήταν συμπτωματικό για τον εν λόγω πίνακα. Για κάποιο άλλο πίνακα θα είμασταν υποχρεωμένοι να ορίσουμε συγκεκριμένες συναρτήσεις αξιοπιστίας. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα ας ορίσουμε τις:
$RE_0(z)=RE_0(x+yi)=1-\min\{1,|x|,|y|\}$,
$RE(A)=RE([z_{kj}])=[RE_0(z_{kj})]$,

$RL_0(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1+x_2+\ldots+x_n$, και για κάθε $k\in\mathbb{N}^*$:
$RL(A^{(1)},A^{(2)},\ldots,A^{(k)})=[RL_0(A^{(1)})]\mid[RL_0(A^{(2)})]\mid\ldots\mid[RL_0(A^{(k)})]$.

Ισχύει ότι $RE\in\mathcal{F}_{RE}$, $RL\in\mathcal{F}_{RL}$. Για την σχετική απόδειξη, βλ. παράρτημα A, προτάσεις A.7, A.8.

Η συνάρτηση RE αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο $z\in\mathbb{C}$ την αξιοπιστία:
$1-\min\{1,|Re(z)|,|Im(z)|\}$.

Η συνάρτηση RL εξισώνει την αξιοπιστία ενός πιθανού κόσμου με το άθροισμα της αξιοπιστίας των στοιχείων (ατόμων) του.

Επίσης, ορίζουμε την συνάρτηση (για κάθε $k\in\mathbb{N}^*$):

$LS(x_1,x_2,\ldots,x_k)=\{m\in\{1,2,\ldots,k\}:\forall j\in\{1,2,\ldots,k\}\ x_m\geq x_j\}$.

Στο παράρτημα Α, πρόταση Α.9 αποδεικνύεται ότι $LS\in\mathcal{F}_{LS}$.

Η συνάρτηση LS επιλέγει τον πιθανό κόσμο με την μέγιστη αξιοπιστία. Αν υπάρχουν περισσότεροι από ένας πιθανοί κόσμοι με μέγιστη αξιοπιστία, επιλέγονται όλοι.

Για τις παραπάνω συναρτήσεις έχουμε:

$$B = RE(K_2) = \begin{bmatrix} 1-\min\{1,|1|,|1|\} & 1-\min\{1,|0|,|1|\} \\ 1-\min\{1,|1|,|0|\} & 1-\min\{1,|1|,|1|\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = RL(B) = \begin{bmatrix} 0+1 \\ 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

S=LS(C)={1,2}

$$D = MS(K_2, S) = \begin{bmatrix} 1+i & i \\ 1 & 1+i \end{bmatrix}$$

$$E = MN(D) = \begin{bmatrix} 1-1 & 0-1 \\ 1-0 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$p=TTI(E)=(T\wedge(\neg\alpha_2))\vee(\alpha_1\wedge T)\equiv\alpha_1\vee(\neg\alpha_2)$.

Καταλήξαμε δηλαδή ότι, για τις συναρτήσεις RE, RL και LS όπως τις ορίσαμε παραπάνω, η γνώση του πίνακα K_2 είναι η λογική πρόταση $\alpha_1\vee(\neg\alpha_2)$. Είναι προφανές ότι διαφορετικές επιλογές της παραμέτρου LS θα έδιναν ενδεχομένως διαφορετικό αποτέλεσμα. Η εφαρμογή της παραπάνω μεθόδου, με τις ίδιες παραμέτρους, στους (μη αντιφατικούς) πίνακες K και K_1 του ίδιου παραδείγματος θα έδινε:

$QT(K)=\alpha_1\wedge T\equiv\alpha_1$

$QT(K_1)=\alpha_1\wedge\alpha_2$.

Ας δούμε κατά πόσον το αποτέλεσμα είναι διαισθητικά λογικό. Για τους K, K_1 είναι προφανές ότι είναι. Άλλωστε ισχύει ότι $QT(K)\equiv TTI(K)$ και $QT(K_1)\equiv TTI(K_1)$. Τονίζουμε ότι η ισχύς των παραπάνω ισοδυναμιών είναι καθαρά συμπτωματική. Στην γενική περίπτωση ο μετασχηματισμός QT δεν δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με τον TTI, ακόμα και για μη αντιφατικούς πίνακες.

Για τον K_2, θυμίζουμε ότι προέκυψε από την ενημέρωση του αρχικού πίνακα K με τους M_1 και M_2, οι οποίοι αντιπροσώπευαν τις λογικές προτάσεις: α_1, $\neg\alpha_1\vee\alpha_2$, $\neg\alpha_2$ αντίστοιχα. Επίσης, ο τρόπος που θέσαμε τους διάφορους δείκτες αξιοπιστίας έδειξε ότι οι διάφορες μετρήσεις (παρατηρήσεις) ήταν εξίσου αξιόπιστες. Αν χρησιμοποιούσαμε διαφορετικούς δείκτες αξιοπιστίας το αποτέλεσμα θα ήταν αρκετά διαφορετικό. Δεδομένου ότι $QT(K_2)\equiv\alpha_1\vee(\neg\alpha_2)$, έχουμε ότι η μοναδική ερμηνεία

(κόσμος) την οποία δεν ικανοποιεί η QT(K_2) είναι η ερμηνεία (F,T). Με απλή επαλήθευση (βλ. πίνακα παρακάτω) φαίνεται ότι όλες οι ερμηνείες της γλώσσας ικανοποιούν ακριβώς δύο από τις ενημερώσεις, εκτός από την ερμηνεία (F,T) η οποία ικανοποιεί μόνο μία από τις ενημερώσεις.

Ενημερώσεις/Ερμηνείες	(T,T)	(T,F)	(F,T)	(F,F)
$K \Rightarrow \alpha_1$	T	T	F	F
$M_1 \Rightarrow \neg\alpha_1 \vee \alpha_2$	T	F	T	T
$M_2 \Rightarrow \neg\alpha_2$	F	T	F	T

Είναι λοιπόν απόλυτα λογικό ο αλγόριθμός μας να «προτιμήσει» την απόρριψη της ερμηνείας (F,T) σε σχέση με τις υπόλοιπες. Συνεπώς, το αποτέλεσμα του αλγορίθμου είναι διαισθητικά λογικό και σε αυτή την περίπτωση. Αν οι αξιοπιστίες των διαφόρων ενημερώσεων ήταν διαφορετικές, τότε η ικανοποιησιμότητα (ή μη) μίας ενημέρωσης από μία ερμηνεία θα είχε διαφορετικό βάρος, με συνέπεια να μην μετράει μόνο το πλήθος των ενημερώσεων τις οποίες ικανοποιεί η κάθε ερμηνεία, αλλά και το ποιές ικανοποιεί αυτή.

5.8 Παράμετροι του Μετασχηματισμού Επερωτήσεων

Ο μετασχηματισμός επερωτήσεων είναι μία ισχυρότατη κατασκευή, η οποία επιτρέπει την ανάθεση μίας λογικής πρότασης σε κάθε πίνακα. Η συνάρτηση QT είναι μία σύνθετη συνάρτηση, η οποία πρακτικά εξαρτάται μόνο από τον αρχικό πίνακα. Όμως κάποιες από τις συναρτήσεις που συνθέτουν την QT δεν είναι σαφώς καθορισμένες, αλλά περιγράφονται μέσω των ιδιοτήτων τους (συναρτήσεις RE, RL, LS). Οι ιδιότητες αυτές δεν καθορίζουν μονοσήμαντα μία συγκεκριμένη συνάρτηση, αλλά μία κλάση συναρτήσεων με άπειρα μέλη. Έμμεσα λοιπόν, και η συνάρτηση QT δεν είναι σαφώς καθορισμένη, αφού εξαρτάται από τον ορισμό των συναρτήσεων-παραμέτρων RE, RL, LS. Στο παράρτημα Α υπάρχουν κάποια παραδείγματα συναρτήσεων που ανήκουν στις αντίστοιχες κλάσεις.

Όπως περιγράψαμε, οι λόγοι που μας ώθησαν στην περιγραφή μίας κλάσης συναρτήσεων και όχι σε μία συγκεκριμένη συνάρτηση ήταν η πεποίθηση ότι διαφορετικές συναρτήσεις θα είναι καλύτερες για διαφορετικές εφαρμογές καθώς και η δυσκολία απόφασης ως προς την βέλτιστη (ανά εφαρμογή) επιλογή. Ισχυριζόμαστε ότι η εύρεση της βέλτιστης συνάρτησης απαιτεί πολλά πειράματα και δοκιμές κάτω από μία ποικιλία παραμέτρων και ενημερώσεων/βάσεων γνώσης.

Ο κυριότερος όμως λόγος που προτιμήθηκε η προσέγγιση των κλάσεων συναρτήσεων ήταν η ευελιξία που μας παρέχει ένας τέτοιος ορισμός. Διαφορετικές

επιλογές του μετασχηματισμού QT συνδέουν τον ίδιο πίνακα με διαφορετικές λογικές προτάσεις. Κατά συνέπεια, το αποτέλεσμα μίας συγκεκριμένης ενημέρωσης μπορεί να είναι ο ίδιος πίνακας (ανεξάρτητα από τον QT), αλλά οι απαντήσεις στα ερωτήματα του χρήστη διαφέρουν (αφού αντιστοιχεί σε διαφορετική λογική πρόταση). Επομένως, σε ότι αφορά τον χρήστη, διαφορετικές επιλογές για τον QT παράγουν διαφορετικούς αλγορίθμους ενημέρωσης. Με την παραμετροποίηση δηλαδή του μετασχηματισμού QT τελικά παραμετροποιούμε τον αλγόριθμο ενημέρωσης που προτείνουμε.

Συνέπεια των παραπάνω είναι ότι έχουμε στην πράξη ορίσει μία κλάση αλγορίθμων και όχι ένα συγκεκριμένο αλγόριθμο. Όπως θα δείξουμε σε επόμενο κεφάλαιο ο αλγόριθμος του Dalal ([8, 9]) αποτελεί μέλος της κλάσης αυτής. Το ερώτημα της ύπαρξης και άλλων προταθέντων στην βιβλιογραφία αλγορίθμων οι οποίοι να ανήκουν σε αυτήν την κλάση αποτελεί αντικείμενο μελέτης και είναι σίγουρα ένα ακόμα ενδιαφέρον πρόβλημα. Ισχυριζόμαστε ότι λόγω της γενικότητας του μοντέλου μας είναι πολύ πιθανόν να υπάρχουν και άλλοι αλγόριθμοι στην βιβλιογραφία οι οποίοι να ανήκουν σε αυτή την κλάση.

Συνεπώς, με βάση το μοντέλο εργασίας μας, για να ορίσουμε ένα αλγόριθμο επερωτήσεων πρέπει να καθορίσουμε τις εξής παραμέτρους:

1) *Τους δείκτες αξιοπιστίας (RF) των ενημερώσεων και της βάσης γνώσης.* Ο συνήθης τρόπος εδώ είναι να επιτρέπεται στον χρήστη να ορίζει αυθαίρετα τις αξιοπιστίες για κάθε άτομο, πιθανό κόσμο και ενημέρωση. Για ορισμένες εφαρμογές όμως, ενδέχεται να επιθυμούμε τον ορισμό των δεικτών αξιοπιστίας με συγκεκριμένο τρόπο, για λόγους ασφαλείας, για την εξομοίωση του κριτηρίου προτεραιότητας του Dalal (αρχή #4 από Dalal, αξίωμα #2 από αξιώματα AGM), ή για άλλους λόγους.
2) *Τις συναρτήσεις αξιοπιστίας στοιχείου και γραμμής (RE, RL).* Οι συναρτήσεις αυτές παίζουν σημαντικό ρόλο στην επιλογή των γραμμών (πιθανών κόσμων) που θα χρησιμοποιηθούν στα ερωτήματα. Εν γένει θα μπορούσαμε να πούμε ότι αυτού του είδους οι συναρτήσεις είναι δύο τύπων: αυτές των οποίων το αποτέλεσμα εξαρτάται μόνο από την ύπαρξη ή μη κάποιας αντίφασης και αυτές οι οποίες αξιολογούν με κάποιο τρόπο και την ένταση της αντίφασης, εφόσον υπάρχει.
3) *Την συνάρτηση επιλογής γραμμών (LS).* Η συνάρτηση αυτή επηρρεάζει το πόσο «ευαίσθητοι» είμαστε σε αντιφατικές ενημερώσεις. Σε ένα περιβάλλον με πολλές αντιφατικές ενημερώσεις, η συνάρτηση επιλογής γραμμών θα πρέπει να επιλέγει αρκετούς πιθανούς κόσμους, ενώ σε ένα περιβάλλον με λίγες αντιφάσεις οι έστω και λίγο αντιφατικές γραμμές μπορούν να αγνοούνται με ασφάλεια. Μία συνάρτηση επιλογής γραμμών θα μπορούσε για παράδειγμα να επιλέγει ένα σταθερό αριθμό γραμμών, ή τις k πιο αξιόπιστες, όπου k κάποια συνάρτηση του

πλήθους των ενημερώσεων, των γραμμών του πίνακα ή κάποιας άλλης ποσότητας.

Μέσα στις παραπάνω παραμέτρους θα μπορούσαμε να εισάγουμε και τον ορισμό των πράξεων του χώρου των πινάκων. Οι πράξεις αυτές αποτελούν μία μικρότερης σημασίας παράμετρο, και παίζουν ρόλο μόνο όταν απαιτείται η είσοδος του αλγορίθμου ενημερώσεων να είναι λογικές προτάσεις και όχι πίνακες. Σε αυτή την περίπτωση, απαιτείται η χρήση του μετασχηματισμού TT για την μετατροπή των προτάσεων σε πίνακες, ο οποίος επηρρεάζεται από τον ορισμό των πράξεων, με συνέπεια να επηρρεάζεται τελικά και ο αλγόριθμος ενημέρωσης.

Γενικότερα, όταν απαιτείται η είσοδος του αλγορίθμου ενημέρωσης να είναι υπό την μορφή λογικών προτάσεων, παίζει μεγάλο ρόλο και η επιλογή της παραμέτρου #1, δηλαδή του δείκτη RF. Μιας και στις λογικές προτάσεις δεν υπάρχει καμία πληροφορία αξιοπιστίας, η πληροφορία αυτή πρέπει να εισαχθεί εκ των υστέρων, με κάποιο συγκεκριμένο και προαποφασισμένο τρόπο (για παράδειγμα να έχουμε σταθερή αξιοπιστία για κάθε ενημέρωση, ή αξιοπιστία η οποία να εξαρτάται από το πλήθος των ενημερώσεων, ή αξιοπιστία η οποία να εξαρτάται από τον χρήστη που παρείχε την είσοδο κοκ). Αντίθετα, όταν οι ενημερώσεις είναι εξαρχής πίνακες, η παράμετρος #1 δεν παίζει ρόλο, αφού η πληροφορία αξιοπιστίας υπάρχει ενσωματωμένη σε κάθε πίνακα-ενημέρωση.

Μία πέμπτη παράμετρος, επίσης μικρότερης σημασίας, είναι η χρήση ή μη της διαδικασίας της *αποκοπής*. Η διαδικασία αυτή συμπτύσσει κατά κάποιο τρόπο τον πίνακα γνώσης, προκαλώντας απώλεια πληροφορίας με αντάλλαγμα την καλύτερη ταχύτητα απόκρισης του συστήματος. Στο επόμενο κεφάλαιο θα περιγραφεί με περισσότερη λεπτομέρεια η διαδικασία αυτή και οι λόγοι εισαγωγής της.

5.9 Ιδιότητες του Μετασχηματισμού Επερωτήσεων

Παρά την γενικότητα του μετασχηματισμού επερωτήσεων, μπορούμε να κάνουμε κάποιες γενικές παρατηρήσεις ως προς τις ιδιότητές του. Μία πρώτη σημαντική παρατήρηση είναι ότι ο μετασχηματισμός επερωτήσεων μετατρέπει τον πίνακα σε λογική πρόταση μόνο για τις ανάγκες των ερωτημάτων. Μελλοντικές ενημερώσεις θα γίνουν πάνω στον αρχικό πίνακα, οπότε η όλη διαδικασία του μετασχηματισμού θα πρέπει να επαναληφθεί για να υπολογιστεί η νέα λογική πρόταση πάνω στην οποία θα εκτελεστούν τυχόν επερωτήσεις.

Στην αρχή του κεφαλαίου είχαμε πει ότι ο πίνακας της βάσης ουσιαστικά κρατάει το ιστορικό ενημερώσεων, παρά το γεγονός ότι δεν διατηρείται κάθε ενημέρωση χωριστά. Δηλαδή κρατάμε από κάθε ενημέρωση την πληροφορία που μας ενδιαφέρει, χωρίς να κρατάμε την ίδια την ενημέρωση. Πράγματι, ο κάθε πιθανός κόσμος κάθε ενημέρωσης ανατίθεται σε τουλάχιστον μία γραμμή του τελικού πίνακα,

ενώ για τα άτομα του κάθε πιθανού κόσμου έχουμε μία σύνθεση πληροφορίας μεταξύ του αρχικού κόσμου (βάσης) και της κάθε ενημέρωσης. Έτσι, για κάθε άτομο, σε κάθε πιθανό κόσμο, γνωρίζουμε την ένταση με την οποία πρέπει να πιστεύουμε στην κατάφαση και στην άρνησή του συνολικά, όπως αυτή έχει προκύψει από το άθροισμα των δεικτών αξιοπιστίας του συγκεκριμένου ατόμου στους πιθανούς κόσμους (γραμμές) που έχουν συνθέσει τον εν λόγω κόσμο της τελικής γνώσης. Έτσι, δεν είμαστε υποχρεωμένοι να κρατάμε όλες τις ενημερώσεις, αλλά μόνο τον τελικό πίνακα. Το πλεονέκτημα της προσέγγισης αυτής είναι ότι όλη η γνώση είναι συγκεντρωμένη σε ένα πίνακα, με συνέπεια την δυνατότητα χειρισμού της γνώσης μας συνολικά. Επίσης, η διαδικασία της επερώτησης (μετασχηματισμός επερωτήσεων) δεν θα ήταν εφικτή πάνω σε κάποιο σύνολο από πίνακες-ενημερώσεις.

Για λόγους που αναλύσαμε στο κεφάλαιο 3, θα θέλαμε ο αλγόριθμος ενημερώσεων να έχει τις ιδιότητες της προσεταιριστικότητας και της αντιμεταθετικότητας. Η προσεταιριστικότητα χρειάζεται γιατί η γνώση είναι συνολική, με την έννοια ότι δεν θα πρέπει να εξαρτάται από την σειρά με την οποία συντίθενται οι ίδιες πληροφορίες. Η αντιμεταθετικότητα χρειάζεται διότι η χρονική σειρά των ενημερώσεων δεν θα πρέπει να επηρρεάζει το τελικό αποτέλεσμα (γνώση).

Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμός μας έχει την ιδιότητα της προσεταιριστικότητας και, υπό την έννοια που θα περιγράψουμε και την ιδιότητα της αντιμεταθετικότητας. Πράγματι, ισχύει η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 5.2

Για τυχαίους πίνακες A, B, C$\in\mathbb{C}^{*\times n}$, ισχύει η σχέση: A•(B•C)=(A•B)•C.

Απόδειξη

Είναι προφανές ότι οι γραμμές του πίνακα A•(B•C) θα είναι μία μετάθεση των γραμμών του (A•B)•C, λόγω της προσεταιριστικότητας της πρόσθεσης. Μένει να δείξουμε ότι η μετάθεση αυτή είναι η ταυτοτική μετάθεση. Αυτό είναι επίσης εύκολο να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της προσεταιριστικότητας της πράξης της παράθεσης («|»).

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω πρόταση είναι προφανές ότι QT(A•(B•C))=QT((A•B)•C), δηλαδή ο αλγόριθμός μας έχει την ιδιότητα της προσεταιριστικότητας.

Για την αντιμεταθετικότητα δεν ισχύει το ίδιο αποτέλεσμα. Εν γένει δηλαδή ισχύει: A•B≠B•A. Ισχύει εντούτοις το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση 5.3

Για τυχαίους πίνακες A, B$\in\mathbb{C}^{*\times n}$, έστω K_1=A•B, K_2=B•A. Τότε οι γραμμές του K_1 είναι μία μετάθεση των γραμμών του K_2.

Απόδειξη

Αποδεικνύεται εύκολα λόγω της αντιμεταθετικότητας της πρόσθεσης.

Έστω τώρα δύο πίνακες A, $B \in \mathbb{C}^{*\times n}$, και οι αντίστοιχοι πίνακες K_1, K_2. Από τον ορισμό των κλάσεων συναρτήσεων $\mathcal{F}_{RL}$, $\mathcal{F}_{RE}$, έχουμε ότι οι γραμμές του πίνακα $A_1=RL(RE(K_1))$ θα είναι μία μετάθεση των γραμμών του πίνακα $A_2=RL(RE(K_2))$. Αν η συνάρτηση LS είναι τέτοια ώστε να μην εξαρτάται από την σειρά των στοιχείων του πίνακα εισόδου της, αλλά μόνο από τα στοιχεία αυτά καθαυτά (αξιοπιστίες), τότε θα επιλέξει ακριβώς τις ίδιες γραμμές. Οι γραμμές αυτές μπορεί να μην έχουν τους ίδιους δείκτες (δηλαδή τα σύνολα $S_1=LS(A_1)$ και $S_2=LS(A_2)$ μπορεί να είναι διαφορετικά), αλλά οι δείκτες των S_1 και S_2 θα αναφέρονται στις ίδιες γραμμές των K_1, K_2 (αφού οι γραμμές του K_1 είναι μετάθεση των γραμμών του K_2). Συνεχίζοντας τον παραπάνω συλλογισμό, η τελική λογική πρόταση θα προκύψει από την κανονικοποίηση των ίδιων πιθανών κόσμων, άρα θα είναι η διάζευξη των ίδιων λογικών προτάσεων. Τελικά δηλαδή $QT(K_1) \cong QT(K_2)$.

Άρα λοιπόν αποδείξαμε, με μη τυπικό τρόπο, την αντιμεταθετικότητα της πράξης της ενημέρωσης, σε επίπεδο λογικής πρότασης προς απάντηση επερωτήσεων, για κάποιες από τις πιθανές επιλογές της παραμέτρου LS. Το αποτέλεσμα αυτό είναι ανεξάρτητο της επιλογής των RL, RE και ισχύει για τις πιο «λογικές» από τις πιθανές επιλογές της LS.

Κατά τον μετασχηματισμό επερωτήσεων, μετά την επιλογή των πιο αξιόπιστων πιθανών κόσμων υπήρχε ένα βήμα κανονικοποιήσης (συνάρτηση MN). Η συνάρτηση αυτή ουσιαστικά απαλοίφει τις αντιφάσεις, δίνοντας ως αποτέλεσμα ένα μη αντιφατικό πίνακα. Υπό αυτή την έννοια, η πληροφορία ενός πιθανού κόσμου είναι η γραμμή που προκύπτει μετά την κανονικοποίησή του. Θα μπορούσαμε λοιπόν να είχαμε εφαρμόσει την συνάρτηση MN στον αρχικό πίνακα ώστε να πάρουμε την πλήρη πληροφορία της βάσης. Το λάθος στην προσέγγιση αυτή είναι ότι ακόμα και οι πλέον αντιφατικές γραμμές θα έχουν ρόλο στην τελική λογική πρόταση. Έτσι, θα έχουμε γνώση πολύ «συντηρητική», με την έννοια ότι θα δεχόμαστε πολλούς διαφορετικούς πιθανούς κόσμους. Ο ρόλος των συναρτήσεων RE, RL και LS είναι το «φιλτράρισμα» των πιθανών κόσμων ώστε να πάρουμε μόνο την σημαντική και «σωστότερη» πληροφορία.

5.10 Θετική και Αρνητική Γνώση

Ο δείκτης αξιοπιστίας (RF) με τον οποίο συνδέεται η κατάφαση ή η άρνηση ενός ατόμου μπορεί να είναι ένας θετικός, αρνητικός ή μηδενικός αριθμός. Έτσι, ένας θετικός δείκτης αξιοπιστίας δείχνει εμπιστοσύνη στην κατάφαση ή την άρνηση ενός ατόμου. Για παράδειγμα, για ένα άτομο του οποίου η σχετιζόμενη γνώση είναι ο

μιγαδικός 5i γνωρίζουμε ότι έχουμε εμπιστοσύνη στην άρνηση του ατόμου με ένταση 5. Αντίστοιχα, ο μιγαδικός 3+5i δείχνει εμπιστοσύνη στην κατάφαση του ατόμου με ένταση 3 και επίσης εμπιστοσύνη στην άρνησή του με ένταση 5. Γενικότερα, οι μιγαδικοί αριθμοί των οποίων τόσο το πραγματικό όσο και το φανταστικό μέρος είναι θετικοί αριθμοί ή 0, μεταφέρουν γνώση η οποία προσθέτει πληροφορία στην βάση μας. Τέτοιου είδους γνώση θα ονομάζεται *θετική γνώση*. Αντίθετα, μιγαδικοί αριθμοί όπως ο 3–5i, μεταφέρουν κάποια δυσπιστία, στην προκειμένη περίπτωση δυσπιστία προς την άρνηση του ατόμου το οποίο αναπαριστά ο αριθμός αυτός. Μιγαδικοί των οποίων το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος είναι αρνητικός αριθμός θα λέμε ότι μεταφέρουν *αρνητική γνώση*.

Μέχρι τώρα δεν έχουμε δει κάποια ανάγκη για την χρήση της αρνητικής γνώσης. Κανονικά, μία πληροφορία εκφράζεται με την χρήση θετικής γνώσης και ο προτασιακός λογισμός δεν μας παρέχει την δυνατότητα να εκφράσουμε αρνητική γνώση με κάποιο τρόπο. Εντούτοις, η αρνητική γνώση είναι απαραίτητη για να εκφράσει μείωση της πεποίθησής μας σε κάτι. Παρατηρήστε ότι η γνώση «–3» δεν είναι ίδια με την γνώση «3i». Στην πρώτη περίπτωση έχουμε μείωση της πίστης μας στην κατάφαση του ατόμου, ενώ στην δεύτερη αύξηση της πίστης μας στην άρνηση του ατόμου. Οι δύο πληροφορίες είναι παρόμοιες, αλλά όχι ταυτόσημες.

Σε πολλές περιπτώσεις, θέλουμε να μειώσουμε τον βαθμό εμπιστοσύνης κάποιας πληροφορίας, χωρίς απαραίτητα να αυξήσουμε την πίστη μας στην άρνηση της πληροφορίας αυτής. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η αρνητική γνώση είναι το εργαλείο μέσω του οποίου θα μεταφέρουμε την επιθυμία μας αυτή στην βάση. Στην επόμενη ενότητα θα δούμε αναλυτικότερα τέτοιες περιπτώσεις, όπου η αξία της αρνητικής γνώσης θα γίνει ακόμα πιο σαφής.

5.11 Αναθεώρηση, Διόρθωση, Αφαίρεση, Διαγραφή

Στις υπάρχουσες προσεγγίσεις, λόγω της χρήσης της προτασιακής λογικής δεν υπάρχει η δυνατότητα όπως είπαμε να εκφραστεί η αρνητική γνώση. Έτσι, όλες οι μέθοδοι της βιβλιογραφίας αναφέρονται σε θετική γνώση μόνο. Η αδυναμία αυτή είναι που ώθησε τους ερευνητές στον ορισμό πράξεων όπως η διόρθωση, η αφαίρεση και η διαγραφή. Θα δούμε ότι με την χρήση της αρνητικής γνώσης μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τέτοιες πράξεις στο μοντέλο ενημέρωσης που προτείνουμε, παρά το γεγονός ότι αυτές οι πράξεις δείχνουν ποιοτικά διαφορετικές. Η εώς τώρα ανάλυση και τα παραδείγματα που δώσαμε αναφέρονται σε αναθεωρήσεις. Θα δούμε όμως ότι χωρίς την παραμικρή αλλαγή στον αλγόριθμο ενημέρωσης μπορούμε να εκτελέσουμε και τις παραπάνω πράξεις. Η πληροφορία σχετικά με την επιθυμητή πράξη μπορεί να ενσωματωθεί στους πίνακες ενημέρωσης, διαμέσου της πληροφορίας αξιοπιστίας των διαφόρων ατόμων, χωρίς να αλλοιωθεί η λογική πληροφορία που οι πίνακες αυτοί μεταφέρουν.

Η πράξη της αφαίρεσης είναι δυϊκή της αναθεώρησης. Αναφέρεται στην αφαίρεση πληροφορίας από την βάση, όταν η πίστη μας στην αλήθεια κάποιας πληροφορίας μειώνεται λόγω μίας παρατήρησης. Έτσι, αν για παράδειγμα διαπιστώσουμε ότι ένα όργανο μετρήσεων έχει κάποια βλάβη, οι μετρήσεις οι οποίες έχει κάνει παύουν να είναι αξιόπιστες. Σε αυτήν την περίπτωση, οφείλουμε με κάποιο τρόπο να αφαιρέσουμε την γνώση που μας παρείχε το όργανο αυτό και ο τρόπος που προτείνεται στην βιβλιογραφία είναι ο ορισμός μίας νέας πράξης – της πράξης της αφαίρεσης.

Από την σημασιολογία της αρνητικής γνώσης φαίνεται εύκολα ότι για να εκτελέσουμε την πράξη της αφαίρεσης, αρκεί ο δείκτης αξιοπιστίας (RF) της γνώσης την οποία θέλουμε να αφαιρέσουμε να έχει αρνητικό πρόσημο. Με άλλα λόγια, η αφαίρεση της γνώσης (πίνακα) Μ από μία βάση γνώσης είναι ισοδύναμη σημασιολογικά με την αναθεώρηση (ενημέρωση) της βάσης με τον πίνακα –Μ. Έτσι, δεν υπάρχει λόγος ορισμού ειδικής πράξης για την εκτέλεση αφαιρέσεων.

Ένα επιπλέον πλεονέκτημα της προσέγγισης αυτής είναι ότι μπορούμε στον ίδιο πίνακα να έχουμε πιθανούς κόσμους οι οποίοι να περιέχουν αρνητική πληροφορία και πιθανούς κόσμους με θετική πληροφορία. Μπορούμε ακόμα και στον ίδιο πιθανό κόσμο να έχουμε άτομα για τα οποία εκτελούμε αναθεώρηση (θετική γνώση) και άτομα για τα οποία εκτελούμε αφαίρεση (αρνητική γνώση). Κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό στα κλασικά μοντέλα.

Η ενσωμάτωση της πράξης της διόρθωσης στο μοντέλο μας είναι κάπως πιο περίπλοκη. Η πράξη της διόρθωσης αναφέρεται στην ενημέρωση της βάσης μας όταν ο κόσμος αλλάζει δυναμικά, σε αντίθεση με την αναθεώρηση, η οποία αναφέρεται στην ενημέρωση της βάσης όταν μάθουμε κάτι νέο για τον ίδιο, σταθερό κόσμο. Η διαφορά των δύο πράξεων θα γίνει σαφέστερη με ένα παράδειγμα. Έστω ότι σε ένα δωμάτιο υπάρχουν δύο λάμπες (η «α» και η «β»), μία εκ των οποίων είναι αναμμένη. Η γνώση μας μπορεί να εκφραστεί με την λογική πρόταση: $\psi=(\alpha\wedge(\neg\beta))\vee((\neg\alpha)\wedge\beta)$. Ας υποθέσουμε ότι διαμέσου κάποιας παρατήρησης διαπιστώνεται ότι η λάμπα α είναι αναμμένη. Η ενημέρωση εκφράζεται με την πρόταση $\mu=\alpha$. Αφού η α είναι αναμμένη, και με δεδομένο ότι μία από τις δύο είναι αναμμένη, μπορούμε με ασφάλεια να συμπεράνουμε ότι η β είναι σβηστή. Άρα, ο σωστότερος τρόπος να αναθεωρήσουμε την βάση μας είναι ο: $\psi'=\psi\bullet\mu=\alpha\wedge(\neg\beta)$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι στον αρχικό κόσμο (ψ) στέλνουμε ένα ρομπότ με εντολή να ανάψει την λάμπα α. Η ενημέρωση μπορεί και πάλι να εκφραστεί με την πρόταση $\mu=\alpha$. Το διαισθητικά σωστό αποτέλεσμα όμως είναι διαφορετικό. Με την έξοδο του ρομπότ από το δωμάτιο, είναι βέβαιο ότι η λάμπα α είναι αναμμένη. Δεν έχουμε όμως καμία πληροφορία για την κατάσταση της λάμπας β. Πριν την είσοδο του ρομπότ στο δωμάτιο θα μπορούσε να είναι αναμμένη ή και σβηστή, και η ενέργεια του ρομπότ δεν επηρρέασε την κατάστασή της. Συνεπώς το μοναδικό πράγμα που γνωρίζουμε για

την νέα κατάσταση του κόσμου είναι ότι η α είναι αναμμένη, άρα η σωστότερη ενημερωμένη βάση σε αυτή την περίπτωση είναι η πρόταση: ψ′=ψ•μ=α.

Παρατηρείται εδώ ότι, τόσο η βάση, όσο και η ενημέρωση, είναι ταυτόσημες και στις δύο περιπτώσεις. Εντούτοις, το διαισθητικά σωστό αποτέλεσμα είναι διαφορετικό, κάτι που δικαιολογεί και τον ορισμό των δύο διαφορετικών πράξεων. Η ειδοποιός διαφορά μεταξύ διόρθωσης και αναθεώρησης έχει να κάνει με το γεγονός ότι στην διόρθωση η αλλαγή προέκυψε από κάποια ενέργεια (του ρομπότ), ενώ στην αναθεώρηση η αλλαγή προήλθε από κάποια παρατήρηση (παρατηρήσαμε την κατάσταση της λάμπας α). Επίσης, στην διόρθωση ο κόσμος αλλάζει δυναμικά, ενώ στην αναθεώρηση ο κόσμος είναι στατικός. Έτσι, στην πρώτη περίπτωση του παραδείγματός μας, η παρατήρησή μας δεν άλλαξε την κατάσταση του κόσμου, απλά μας έδωσε επιπλέον πληροφορία για την ίδια, συγκεκριμένη, σταθερή κατάσταση. Στην δεύτερη περίπτωση, η ενέργεια του ρομπότ (ενδεχομένως) άλλαξε την κατάσταση του κόσμου. Έτσι, έχουμε έναν δυναμικό, μεταβαλλόμενο κόσμο και η καταλληλότερη πράξη ενημέρωσης είναι αυτή της διόρθωσης.

Η διαφορά των δύο τύπων ενημερώσεων έχει μία πολύ σημαντική συνέπεια. Η συνέπεια αυτή είναι ότι αλλάζει η βαρύτητα της παλιάς γνώσης. Στην περίπτωση της αναθεώρησης, το μόνο που έχει αλλάξει είναι η άποψή μας για τον κόσμο και όχι ο ίδιος ο κόσμος. Μία αντίφαση οφείλεται σε κάποια ή κάποιες λάθος παρατηρήσεις. Το λάθος μπορεί να είναι είτε στην παλιά γνώση, είτε στην καινούρια. Αντίθετα, στην περίπτωση της διόρθωσης τα πράγματα είναι διαφορετικά. Ο κόσμος άλλαξε, συνεπώς ακόμα και τέλεια να ήταν η παλιά γνώση μας δεν έχει πλέον καμία ισχύ, αφού αναφέρεται σε μία προηγούμενη κατάσταση. Έτσι, μία αντίφαση σε αυτή την περίπτωση οφείλεται πάντα στην παλιά γνώση. Εδώ βέβαια παίρνουμε ως δεδομένο ότι η νέα γνώση γίνεται αποδεκτή. Αυτό εν γένει δεν ισχύει. Όπως και στην περίπτωση των αναθεωρήσεων πρέπει να αξιολογούμε την πληροφορία με βάση τον δείκτη RF πριν αποφασίσουμε για την αποδοχή της ή όχι.

Με δεδομένο ότι στην διόρθωση η παλιά γνώση δεν έχει πλέον ισχύ (εφόσον αποδεχθούμε την πληροφορία που μεταφέρει μία διόρθωση) μπορούμε με ασφάλεια να αφαιρέσουμε οποιαδήποτε γνώση αντιφάσκει με την διόρθωση. Άρα λοιπόν στην πραγματικότητα η διόρθωση είναι μία σύνθετη πράξη: αρχικά αφαιρεί οποιαδήποτε πληροφορία αντιφάσκει με αυτήν και στην συνέχεια προσθέτει την γνώση την οποία μεταφέρει. Δεδομένου ότι δεν πρέπει να είμαστε απόλυτοι κατά την αποδοχή διορθώσεων, τόσο το πρώτο βήμα, όσο και το δεύτερο πρέπει να χαρακτηρίζονται από κάποιους δείκτες αξιοπιστίας (RF).

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα για να γίνουν κατανοητά τα παραπάνω. Έστω ότι δουλεύουμε σε μία απλή γλώσσα με τρία άτομα, έχουμε κάποια γνώση K και επιθυμούμε την διόρθωση του K με τον πίνακα:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3i \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας M αντιστοιχεί στην λογική πρόταση TTI(M)=$\alpha_1 \wedge T \wedge (\neg\alpha_3) \cong \alpha_1 \wedge (\neg\alpha_3)$. Αφού μας ενδιαφέρει η διόρθωση του K, ο M μας λέει ότι, ανεξάρτητα από την προηγούμενη κατάσταση του κόσμου, ή ισοδύναμα, ανεξάρτητα από την γνώση που περιέχει ο K, στην νέα κατάσταση ισχύει το α_1 με ένταση 2, το $\neg\alpha_3$ με ένταση 3, ενώ δεν έχουμε γνώση για το α_2, ή, ισοδύναμα, ισχύει το α_2 με ένταση 0. Έτσι οποιαδήποτε πληροφορία έχουμε σχετικά με την άρνηση του α_1 πρέπει να αφαιρεθεί από την βάση. Μας ενδιαφέρει να αφαιρέσουμε μόνο την πληροφορία την σχετική με την άρνηση του ατόμου, μιας και η κατάφαση δεν προκαλεί αντίφαση (συμφωνεί με την νέα κατάσταση). Η αφαίρεση αυτή πρέπει να γίνει με ένταση 2, όση είναι και η αξιοπιστία του ατόμου α_1 στον νέο κόσμο (με βάση την ενημέρωση). Για τους ίδιους λόγους, η κατάφαση του α_3 πρέπει να αφαιρεθεί με ένταση 3, ενώ η άρνηση του α_2 πρέπει να αφαιρεθεί με ένταση 0. Συνοψίζοντας, για να πετύχουμε την διόρθωση της γνώσης K με την πληροφορία που μεταφέρει ο M αρκεί να εκτελέσουμε αναθεώρηση του πίνακα K με τον πίνακα:

$$M' = \begin{bmatrix} 2-2i & 0 & -3+3i \end{bmatrix}$$

Παρατηρείστε καταρχήν ότι TTI(M)=TTI(M′)=$\alpha_1 \wedge T \wedge (\neg\alpha_3) \cong \alpha_1 \wedge (\neg\alpha_3)$. Ο M′ προέκυψε εμπλουτίζοντας την γνώση (δείκτη αξιοπιστίας) κάθε ατόμου με μία αρνητική ποσότητα ($2 \to 2-2i$, $3i \to -3+3i$). Αν ο K ήταν ο πίνακας:

$$K = \begin{bmatrix} i & 1 & 3i \end{bmatrix}$$

για τον οποίο TTI(K)=$(\neg\alpha_1) \wedge \alpha_2 \wedge (\neg\alpha_3)$, το αποτέλεσμα της ενημέρωσης με τον M′ θα ήταν ο πίνακας:

$$K' = K \bullet M' = \begin{bmatrix} 2-i & 1 & -3+6i \end{bmatrix}, \text{ TTI(K′)}=\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge (\neg\alpha_3).$$

Στο άτομο α_1, υπάρχει αντίφαση μεταξύ των K, M′. Αν είχαμε ενημερώσει τον πίνακα K με τον M, θα παίρναμε αντίφαση. Εντούτοις, με τον M′, δεν προκύπτει αντίφαση, διότι αυτός σβήνει (αφαιρεί) και την παλιά πληροφορία σχετικά με το α_1. Για το α_2 δεν έχουμε κανένα πρόβλημα, μιας και η γνώση του M (και του M′) είναι μηδενική ως προς αυτό το άτομο. Για το α_3 επίσης δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα, δεδομένου ότι τόσο ο K, όσο και ο M′ μας προτρέπουν να πιστέψουμε στην αλήθεια του $\neg\alpha_3$, συνεπώς δεν υπάρχει αντίφαση. Παρατηρήστε ότι στον κόσμο που προέκυψε ως αποτέλεσμα της ενημέρωσης, ισχύει τόσο το α_1 όσο και το $\neg\alpha_3$. Δηλαδή η ενημέρωση M (ισοδύναμα η M′) έγινε εξ ολοκλήρου αποδεκτή. Αυτό όμως δεν συμβαίνει πάντα. Αν ο αρχικός μας πίνακας K ήταν ο:

$$K = \begin{bmatrix} 5i & 1 & 3i \end{bmatrix}$$

(ο οποίος αντιστοιχεί στην ίδια γνώση με τον προηγούμενο, απλά έχουμε αλλάξει τον δείκτη αξιοπιστίας του ατόμου α_1) τότε ο δείκτης αξιοπιστίας (RF=2) του ατόμου α_1

στον M (ισοδύναμα στον M′) δεν θα ήταν αρκετός για να αλλάξει τις πεποιθήσεις μας ως προς το α_1. Τότε θα είχαμε:

$$K' = K \bullet M' = \begin{bmatrix} 2+3i & 1 & -3+6i \end{bmatrix}$$

Έχουμε ότι το στοιχείο της πρώτης στήλης του K′ (2+3i) είναι αντιφατικό, αλλά επειδή 2<3, η κανονικοποιημένη μορφή της (μοναδικής) γραμμής του K′ θα είναι η:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -9 \end{bmatrix}$$

συνεπώς ο K′ αντιστοιχεί στην λογική πρόταση QT(K′)=$(\neg\alpha_1)\wedge\alpha_2\wedge(\neg\alpha_3)$. Σε αυτή την περίπτωση λοιπόν, η αξιοπιστία του ατόμου α_1 στον πίνακα ενημέρωσης δεν ήταν αρκετή ώστε να μας αλλάξει τις πεποιθήσεις ως προς το α_1, επομένως η M′ δεν έγινε εξ ολοκλήρου αποδεκτή.

Για να γίνει σαφέστερη η παραπάνω μέθοδος, θα την εφαρμόσουμε στο παράδειγμα με τις λάμπες που αναφέρθηκε παραπάνω. Έστω ότι είχαμε για την αρχική μας γνώση τον πίνακα:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \text{TTI(K)}=(\alpha\wedge(\neg\beta))\vee((\neg\alpha)\wedge\beta),$$

δηλαδή ακριβώς μία από τις α, β αναμμένη. Για την πρώτη περίπτωση, εκτελούμε ενημέρωση της βάσης με τον πίνακα M_1:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{TTI}(M_1)=\alpha\wedge T\cong\alpha.$$

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε αναθεώρηση, και το αποτέλεσμα είναι ο πίνακας:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 2 & i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}, \text{TTI}(K_1)=(\alpha\wedge(\neg\beta))\vee(F\wedge\beta)\cong\alpha\wedge(\neg\beta).$$

Για να υπολογίσουμε την παράσταση $QT(K_1)$ προφανώς χρειαζόμαστε σαφή ορισμό των παραμέτρων RE, RL, LS. Πάντως, είναι εμφανές ότι η πρώτη γραμμή του πίνακα δεν περιέχει αντίφαση, ενώ η δεύτερη περιέχει το αντιφατικό στοιχείο 1+i, το οποίο μάλιστα είναι μία διαισθητικά ισχυρή αντίφαση. Το ότι η αντίφαση είναι ισχυρή προκύπτει από το γεγονός ότι Re(1+i)=Im(1+i)=1, συνεπώς είναι πολύ δύσκολη η απόφαση ως προς το αν είναι σωστότερο να πιστέψουμε στην κατάφαση ή στην άρνηση του ατόμου. Άρα θεωρούμε το στοιχείο αυτό αρκετά αντιφατικό. Κάθε «λογική» συνάρτηση αξιοπιστίας και επιλογής γραμμών (αλλά όχι όλες οι αποδεκτές, με βάση τους περιορισμούς των αντίστοιχων κλάσεων) θα επέλεγε την πρώτη γραμμή ως την μοναδική αξιόπιστη. Επομένως $QT(K_1)=\alpha\wedge(\neg\beta)$, δηλαδή το αναμενόμενο διαισθητικά αποτέλεσμα της αναθεώρησης.

Αν αντί για τον M_1 χρησιμοποιούσαμε για την ενημέρωση της βάσης τον M_2:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1-i & 0 \end{bmatrix}, \text{TTI}(M_2)=\alpha\wedge T\cong\alpha$$

τότε θα παίρναμε το αποτέλεσμα:

$$K_2 = \begin{bmatrix} 2-i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{TTI}(K_2)=(\alpha\wedge(\neg\beta))\vee(\alpha\wedge\beta)\cong\alpha$$

Παρατηρούμε ότι ο K_2 δεν περιέχει αντιφατικά στοιχεία (σε αντίθεση με τον K_1). Και πάλι, για να υπολογιστεί η $QT(K_2)$, χρειαζόμαστε ακριβή ορισμό των παραμέτρων RE, RL, LS. Εντούτοις, με δεδομένο ότι και οι δύο γραμμές είναι μη αντιφατικές, δεν έχουμε λόγο να απορρίψουμε κάποιον από τους δύο πιθανούς κόσμους. Δηλαδή κάθε «λογική» (αλλά όχι και κάθε αποδεκτή) επιλογή των παραπάνω παραμέτρων θα έδινε σαν αποτέλεσμα της εφαρμογής του μετασχηματισμού επερωτήσεων την παράσταση: $QT(K_2)=(\alpha\wedge(\neg\beta))\vee(\alpha\wedge\beta)\equiv\alpha$. Βλέπουμε λοιπόν ότι εδώ πετύχαμε την διόρθωση του K με τον πίνακα M_2.

Συνοψίζοντας, για τον ίδιο αρχικό πίνακα γνώσης K, χρησιμοποιώντας την ίδια πράξη (αυτή της ενημέρωσης) πετύχαμε στην μία περίπτωση αναθεώρηση και στην άλλη διόρθωση, χρησιμοποιώντας τους ισοδύναμους πίνακες M_1 και M_2 (οι οποίοι μετέφεραν την πληροφορία «α»). Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει λόγος ορισμού μίας νέας πράξης για να καλύψουμε την περίπτωση της διόρθωσης, αρκεί ο χρήστης να ενσωματώνει την πληροφορία αυτή στους πίνακες ενημέρωσης που εισάγει στην βάση. Επίσης, η τεχνική αυτή, όπως και στην αφαίρεση, επιτρέπει την ενημέρωση με πίνακες στους οποίους εκτελούμε διόρθωση για κάποια άτομα-πιθανούς κόσμους και αναθεώρηση για κάποια άλλα άτομα-πιθανούς κόσμους, κάτι ανέφικτο με τις υπάρχουσες μεθόδους της βιβλιογραφίας.

Τέλος, μας μένει να ενσωματώσουμε στο μοντέλο μας την πράξη της διαγραφής. Η διαγραφή είναι πράξη δυϊκή της διόρθωσης, δηλαδή ότι η αφαίρεση για την αναθεώρηση. Με απλά λόγια, αν διαπιστώσουμε ότι ο (δυναμικός) κόσμος δεν είχε αλλάξει με τον τρόπο που πιστεύαμε ως τώρα, εκτελούμε μία διαγραφή για να διορθώσουμε τα πράγματα.

Χρησιμοποιώντας τους ίδιους συλλογισμούς που κάναμε κατά την επέκταση του μοντέλου μας για να καλύψει την περίπτωση της αφαίρεσης, μπορούμε να καλύψουμε και την περίπτωση της διαγραφής. Διαγραφή με έναν πίνακα M είναι πράξη ισοδύναμη της διόρθωσης με τον πίνακα –M. Με δεδομένο ότι η διόρθωση έχει ήδη ενσωματωθεί στο μοντέλο μας με τον τρόπο που περιγράφηκε παραπάνω, έχουμε επιτύχει την επέκταση της πράξης της ενημέρωσης ώστε να καλύπτει και την περίπτωση της διαγραφής.

Δείξαμε λοιπόν ότι με την χρήση της αρνητικής γνώσης μπορούμε χωρίς αλλαγές στο μοντέλο μας να εκτελέσουμε όλες τις πράξεις ενημέρωσης. Οι πράξεις αυτές είναι διαφορετικές μεταξύ τους, αλλά η διαφορά αυτή μπορεί να κωδικοποιηθεί εντός των πινάκων ενημέρωσης, με συνέπεια να αποφεύγουμε την ανάγκη ορισμού επιπλέον πράξεων. Έτσι, για την παρούσα εργασία, η πράξη της ενημέρωσης είναι μία – αυτό που αλλάζει είναι οι πίνακες ενημέρωσης.

Κεφάλαιο 6: Ιδιότητες της Μεθόδου Ενημέρωσης

6.1 Εισαγωγή

Έχοντας ολοκληρώσει τον ορισμό της πράξης της ενημέρωσης και του μετασχηματισμού επερωτήσεων, η περιγραφή του μοντέλου μας είναι πλήρης και μπορούμε πλέον να μελετήσουμε κάποιες ακόμα ιδιότητές του. Πέρα από τις ενημερώσεις και τις επερωτήσεις, οι οποίες είναι οι βασικότερες λειτουργίες μίας βάσης γνώσης, υπάρχουν και άλλα ζητήματα, όπως είναι οι περιορισμοί ακεραιότητας και η συγχώνευση βάσεων γνώσεων. Στο παρόν κεφάλαιο θα δούμε πώς χειριζόμαστε τέτοια ζητήματα με το μοντέλο των πινάκων. Επίσης, θα μελετήσουμε την πολυπλοκότητα της μεθόδου και τρόπους βελτίωσής της. Θα δούμε την σχέση της μεθόδου των πινάκων με άλλους αλγορίθμους της βιβλιογραφίας και θα αποδείξουμε κάποια αποτελέσματα σχετικά με την σχέση των πινάκων με τον προτασιακό λογισμό, τα οποία ενδεχομένως να αποδειχθούν χρήσιμα για άλλες εφαρμογές της λογικής.

6.2 Αρχή Ανεξαρτησίας Σύνταξης

Οι περισσότερες μέθοδοι της βιβλιογραφίας θεωρούν ότι ισοδύναμες λογικές προτάσεις αντιστοιχούν σε ισοδύναμες βάσεις και αντίστοιχα σε ισοδύναμες ενημερώσεις. Η αρχή αυτή είναι γνωστή και σαν αρχή ανεξαρτησίας σύνταξης (αρχή #2 του Dalal). Σχετικά με την ισοδυναμία βάσεων επιχειρηματολογήσαμε στο κεφάλαιο 3, όπου δείξαμε ότι δεν έχει να κάνει μόνο με την λογική ισοδυναμία, αλλά πρέπει να εξαρτάται και από τα αποτελέσματα των πιθανών ενημερώσεων. Με ανάλογα επιχειρήματα, συμπεραίνουμε ότι το ίδιο ισχύει και για τις ενημερώσεις. Δηλαδή, ισοδύναμες λογικές προτάσεις δεν δίνουν απαραίτητα ίδια αποτελέσματα αν χρησιμοποιηθούν ως ενημερώσεις στην ίδια βάση.

Σε επίπεδο πινάκων, ισοδύναμοι πίνακες δίνουν εν γένει διαφορετικές ενημερώσεις. Άλλωστε είπαμε ότι μπορούμε να δούμε μία ενημέρωση σαν μία μικρή βάση γνώσης, επομένως η σύνταξή της μετράει. Τέλος, είδαμε ότι ισοδύναμοι, αλλά διαφορετικοί πίνακες, μπορεί να δώσουν και τελείως διαφορετική πράξη (βλ. παράδειγμα για διορθώσεις-αναθεωρήσεις). Είναι δηλαδή σαφές ότι η αρχή ανεξαρτησίας σύνταξης δεν ισχύει στην μέθοδο αναθεωρήσεων που προτείνουμε.

6.3 Άλλες Λειτουργίες των Βάσεων Γνώσεων

Ένα από τα προβλήματα που αντιμετωπίζονται στη βιβλιογραφία και έχει άμεση σχέση με τις ενημερώσεις είναι το πρόβλημα της συγχώνευσης βάσεων γνώσεων. Το πρόβλημα αυτό ανακύπτει όταν έχουμε δύο συστήματα, ανεξάρτητα το ένα από το άλλο (ενδεχομένως με την μορφή πρακτόρων – agents), τα οποία συλλέγουν πληροφορίες για την ίδια περιοχή γνώσης (ίδιο κόσμο υπό μοντελοποίηση). Αν κάποτε επιθυμήσουμε την συγχώνευση της πληροφορίας που έχουν συλλέξει τα δύο συστήματα, τότε έχουμε να κάνουμε με συγχώνευση βάσεων γνώσεων.

Η βασική διαφορά που υπάρχει μεταξύ των κλασικών ενημερώσεων και της συγχώνευσης βάσεων, έχει να κάνει με το γεγονός ότι στις ενημερώσεις έχουμε μία ενημέρωση μεταξύ μίας βάσης γνώσης και μίας ενημέρωσης, ενώ στην περίπτωση της συγχώνευσης έχουμε ενημέρωση μεταξύ δύο βάσεων γνώσης. Έτσι, ενώ στην πρώτη περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η βάση και η ενημέρωση είναι δύο διαφορετικές οντότητες, άρα μπορούμε και να τις χειριστούμε διαφορετικά, στην δεύτερη δεν μπορούμε να κάνουμε καμία διάκριση μεταξύ των δύο βάσεων. Έτσι, για παράδειγμα το αξίωμα προτεραιότητας ενημέρωσης του Dalal δεν θα μπορούσε να ισχύει στην περίπτωση της συγχώνευσης βάσεων γνώσεων. Επίσης, η αντιμεταθετικότητα είναι μία απαραίτητη ιδιότητα της πράξης της συγχώνευσης, σε αντίθεση με την κλασική ενημέρωση, όπου είναι απλά επιθυμητή.

Χωρίς να έχει άμεσα δηλωθεί, ο αλγόριθμός μας αντιμετωπίζει επιτυχώς την περίπτωση της συγχώνευσης βάσεων. Όπως είδαμε, τόσο η ενημέρωση όσο και η βάση είναι πίνακες. Δεν κάναμε πουθενά καμία διάκριση μεταξύ των δύο πινάκων και δεν χρησιμοποιήσαμε το αξίωμα προτεραιότητας ενημέρωσης του Dalal, αφού η απόφαση για την απόρριψη και αποδοχή πεποιθήσεων βασιζόταν αποκλειστικά στους δείκτες αξιοπιστίας. Επίσης, αποδείξαμε ότι η μέθοδός μας είναι, υπό τις προϋποθέσεις που αναφέρθηκαν, αντιμεταθετική πράξη. Έτσι λοιπόν, χωρίς καμία μεταβολή, ο αλγόριθμός μας μπορεί να εκτελέσει συγχώνευση βάσεων γνώσεων.

Ένα άλλο ενδιαφέρον πρόβλημα στις βάσεις γνώσεων είναι η επιβολή των περιορισμών ακεραιότητας που συνήθως υπάρχουν στον υπό μοντελοποίηση κόσμο. Όπως αναφέραμε και στο κεφάλαιο 3, μπορούμε να δούμε τους περιορισμούς ακεραιότητας σαν ένα είδος ενημέρωσης (πίνακα) με πολύ υψηλό δείκτη αξιοπιστίας. Τοποθετώντας υψηλό δείκτη αξιοπιστίας στις προτάσεις που αντιπροσωπεύουν τους περιορισμούς ακεραιότητας, είμαστε βέβαιοι ότι οποιαδήποτε νέα ενημέρωση που αντιφάσκει με τους περιορισμούς αυτούς θα απορριφθεί. Αν μόνο ένα κομμάτι της ενημέρωσης αντιφάσκει με τους περιορισμούς, τότε θα απορριφθεί το αντιφατικό κομμάτι και όχι όλη η ενημέρωση. Επίσης, αν οι περιορισμοί προστεθούν μετά την

αρχικοποίηση της βάσης, τυχόν ενημερώσεις οι οποίες έχουν ήδη γίνει και αντιφάσκουν με τους περιορισμούς θα απορριφθούν εκ των υστέρων.

Αν επιθυμούμε την κατάργηση κάποιου περιορισμού ακεραιότητας, αρκεί να εκτελέσουμε την αφαίρεση της λογικής πρότασης που τον αντιπροσωπεύει, και πάλι με πολύ υψηλό δείκτη αξιοπιστίας. Το ενδιαφέρον σε αυτή την περίπτωση είναι ότι τυχόν ενημερώσεις οι οποίες είχαν απορριφθεί λόγω της ύπαρξης του εν λόγω περιορισμού, θα αποκτήσουν πλέον ισχύ και θα επηρεάζουν τις απαντήσεις μας στις επερωτήσεις, έστω και εκ των υστέρων, εφόσον φυσικά δεν υπάρχει κάποιος άλλος λόγος για να τις απορρίψουμε.

Είπαμε ότι οι περιορισμοί ακεραιότητας φέρουν ένα «πολύ υψηλό» δείκτη αξιοπιστίας. Όσο υψηλός και να είναι αυτός, λόγω της φύσης του δείκτη αξιοπιστίας, μπορεί μετά από ένα μεγάλο πλήθος ενημερώσεων οι οποίες αντιφάσκουν με τον περιορισμό, να παρατηρηθεί το φαινόμενο της απόρριψης του περιορισμού ακεραιότητας. Δηλαδή, αν πολλές ενημερώσεις αντιφάσκουν με τον περιορισμό (ο οποίος για την βάση δεν είναι τίποτα περισσότερο από μία απλή ενημέρωση), μπορεί η βάση μας να θεωρήσει ότι ο περιορισμός δεν έχει πλέον ισχύ, συνεπώς να τον θεωρήσει αντιφατική ενημέρωση και να τον απορρίψει.

Αυτό μπορεί να αποφευχθεί σε επίπεδο υλοποίησης ορίζοντας μία ειδική τιμή η οποία θα συμβολίζει την τιμή άπειρο ($+\infty$). Η τιμή αυτή δεν μπορεί να μειωθεί, επομένως θέτωντας την τιμή αυτή στον δείκτη RF του περιορισμού ακεραιότητας (ενημέρωσης) αποκλείεται να παρατηρηθεί το παραπάνω φαινόμενο. Πάντως η προσέγγιση αυτή εισάγει κάποιες πρόσθετες δυσκολίες. Καταρχήν δεν είναι γνωστό το αποτέλεσμα της πράξης $+\infty-\infty$, οπότε μπορεί να αντιμετωπίσουμε προβλήματα στην περίπτωση εισαγωγής περιορισμών με αρνητική γνώση. Επίσης, οι ορισμοί των διαφόρων συναρτήσεων αξιοπιστίας (RE, RL) θα πρέπει να επεκταθούν ώστε να περιλαμβάνουν και τις τιμές $\pm\infty$. Για τους λόγους αυτούς θεωρούμε την συγκεκριμένη λύση ανεπαρκή.

Εξάλλου, θεωρούμε ότι η παραπάνω λύση δεν συμφωνεί και με την όλη φιλοσοφία του μοντέλου μας. Έχουμε κάνει την παραδοχή ότι δεν υπάρχει αυθεντική γνώση και ότι όλες οι πεποιθήσεις είναι υπό αίρεση σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό. Συνεπώς, η ιδιότητα που έχει το μοντέλο μας να απορρίπτει τους περιορισμούς ακεραιότητας όταν αντιφάσκουν με πολλές ενημερώσεις είναι μάλλον επιθυμητή. Σε τελική ανάλυση, αν ένας περιορισμός αντιφάσκει με πολλές από τις ενημερώσεις της βάσης, τότε μάλλον κάτι δεν πάει καλά με τον εν λόγω περιορισμό και ίσως θα πρέπει να αναθεωρηθεί.

6.4 Πολυπλοκότητα – Ταχύτητα

Ένα πολύ σημαντικό θέμα σε κάθε αλγόριθμο είναι η πολυπλοκότητά του. Στο μοντέλο μας, η πολυπλοκότητα επηρρεάζεται πάρα πολύ από το πλήθος των πιθανών κόσμων ανά ενημέρωση και σε μικρότερο βαθμό από το πλήθος των ατόμων της υποκείμενης γλώσσας.

Ας υποθέσουμε ότι δουλεύουμε σε μία γλώσσα με m το πλήθος άτομα. Έτσι, κάθε πίνακας-ενημέρωση όπως και η βάση ανά πάσα στιγμή θα περιέχει ακριβώς m στήλες. Επίσης, έστω ότι η βάση μας έχει n_0 γραμμές (πιθανούς κόσμους) και η ενημέρωση n_1 γραμμές αντίστοιχα. Για να εκτελέσουμε την ενημέρωση, θα δημιουργήσουμε έναν πίνακα ο οποίος θα περιέχει m στήλες και $n_0 \cdot n_1$ γραμμές, δηλαδή συνολικά $m \cdot n_0 \cdot n_1$ στοιχεία. Για τον υπολογισμό της τιμής κάθε τέτοιου στοιχείου πρέπει να εκτελέσουμε μία πρόσθεση μιγαδικών αριθμών η οποία είναι πολυπλοκότητας $\Theta(1)$. Τελικά δηλαδή η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου ενημέρωσης για μία γλώσσα m ατόμων, πίνακα βάσης n_0 γραμμών και πίνακα ενημέρωσης n_1 γραμμών είναι: $\Theta(m \cdot n_0 \cdot n_1)$. Βλέπουμε λοιπόν ότι η ενημέρωση είναι μία πράξη γραμμικής πολυπλοκότητας ως προς το πλήθος των γραμμών του κάθε εμπλεκόμενου πίνακα και επίσης γραμμικής πολυπλοκότητας ως προς το πλήθος των ατόμων της υποκείμενης γλώσσας.

Συνεχίζοντας το παραπάνω παράδειγμα, αν στον αρχικό πίνακα εκτελέσουμε k ενημερώσεις, των οποίων οι πίνακες έχουν αντίστοιχα n_1, n_2, …, n_k γραμμές και m στήλες, παρατηρούμε ότι ο τελικός πίνακας βάσης που θα προκύψει θα έχει συνολικά $N=n_0 \cdot n_1 \cdot \ldots \cdot n_k$ γραμμές και m στήλες. Αυτό δείχνει ότι το μέγεθος (πλήθος γραμμών) του τελικού πίνακα βάσης αυξάνει με πολύ γρήγορους ρυθμούς ως προς το πλήθος των ενημερώσεων. Για την ακρίβεια, το πλήθος των γραμμών (N) του πίνακα της βάσης είναι της τάξεως του $O(2^k)$ ως προς το πλήθος των ενημερώσεων k, δηλαδή αυξάνει με εκθετικούς ρυθμούς. Έτσι λοιπόν, η επόμενη ενημέρωση (k+1), έστω με n_{k+1} γραμμές και m στήλες, θα απαιτήσει εκθετικής πολυπλοκότητας (ως προς το πλήθος των ενημερώσεων) πράξεις προκειμένου να εκτελεστεί, αφού χρειάζεται $\Theta(N \cdot n_{k+1} \cdot m)$ πράξεις και το N είναι της τάξεως του $O(2^k)$. Αυτό είναι ένα ανεπιθύμητο αποτέλεσμα, το οποίο μας βάζει σε σκέψεις ως προς την αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου μας.

Για την αντιμετώπιση του παραπάνω προβλήματος προτείνουμε την μέθοδο της *αποκοπής*. Το τεράστιο μέγεθος του πίνακα της βάσης οφείλεται στο γεγονός ότι στον πίνακα αυτόν αποθηκεύονται όλες οι ενημερώσεις και όλοι οι πιθανοί κόσμοι, ακόμα και οι αντιφατικοί. Αυτό όπως είπαμε είναι απαραίτητο για την ακεραιότητα των δεδομένων μας, αλλά προκαλεί την συνεχή αύξηση (και ποτέ την μείωση) του μεγέθους του πίνακα βάσης. Η εκθετική αύξηση του πλήθους των γραμμών όμως είναι ένα ανεπιθύμητο αποτέλεσμα, το οποίο μας υποχρεώνει να αναθεωρήσουμε τις

απόψεις μας και να μετριάσουμε λίγο τις απαιτήσεις μας ως προς το τι θα αποθηκεύουμε στον πίνακα γνώσης και τι όχι.

Προκειμένου να πετύχουμε βελτίωση της ταχύτητας αρκεί να μειώσουμε το μέγεθος του πίνακα της βάσης. Αυτό απαιτεί την οριστική διαγραφή (αποκοπή) κάποιας από την πληροφορία που αυτός μεταφέρει. Προφανώς, η προς διαγραφή πληροφορία θα πρέπει να είναι αντιφατική. Εντούτοις, είδαμε ότι και η αντιφατική πληροφορία έχει αξία, δεδομένου ότι νέες ενημερώσεις μπορεί να αλλάξουν την άποψή μας σχετικά με το τι είναι αντιφατικό και τι όχι. Αυτός ήταν και ο αρχικός λόγος για τον οποίο επιμείναμε στην αποθήκευση της αντιφατικής πληροφορίας. Συνεπώς, πρέπει να αξιολογήσουμε με κάποιο τρόπο την απώλεια πληροφορίας που θα έχουμε ανά διαγραφή για να αποφασίσουμε ως προς το ποια πληροφορία θα αποκόψουμε. Η αξιολόγηση αυτή πρακτικά ισοδυναμεί με την εκτίμηση της πιθανότητας μία αντιφατική πληροφορία να γίνει μη αντιφατική σε κάποιο μελλοντικό στάδιο και μοιάζει διαισθητικά με την αντίστοιχη αξιολόγηση που κάναμε στην συνάρτηση LS του μετασχηματισμού επερωτήσεων.

Η διαδικασία της αποκοπής μπορεί να γίνει είτε σε επίπεδο ενημερώσεων είτε σε επίπεδο πιθανών κόσμων. Η αποκοπή ενημερώσεων προϋποθέτει την αποθήκευση της κάθε ενημέρωσης, κάτι το οποίο όμως δεν γίνεται στο μοντέλο μας. Άλλωστε, ακόμα και αν αποθηκεύαμε τις ενημερώσεις, θα ήταν δύσκολο να βρεθούν ενημερώσεις οι οποίες να είναι εξ ολοκλήρου αντιφατικές και μάλιστα τόσο αντιφατικές ώστε να μπορούν να διαγραφούν με ασφάλεια. Για τον λόγο αυτό προτιμήσαμε την αποκοπή πιθανών κόσμων. Όπως θα δούμε άλλωστε η αποκοπή πιθανών κόσμων έχει το επιπλέον πλεονέκτημα ότι ως διαδικασία μοιάζει πάρα πολύ με τον μετασχηματισμό επερωτήσεων, τον οποίο έχουμε ήδη μελετήσει.

Η αποκοπή πιθανών κόσμων έχει άμεσο αντίκτυπο στο μέγεθος του πίνακα βάσης (και κατ' επέκταση στην ταχύτητα ενημέρωσης): κάθε πιθανός κόσμος ο οποίος αποκόπτεται μειώνει το πλήθος των γραμμών του πίνακα βάσης κατά 1. Μένει να δούμε την διαδικασία με την οποία θα αποφασίσουμε το πλήθος των γραμμών που θα αποκοπούν και το ποιές θα είναι αυτές. Το πλήθος των γραμμών που θα αποκοπούν αποτελεί ένα συμβιβασμό μεταξύ ακεραιότητας πληροφορίας και ταχύτητας απόκρισης του συστήματος. Προφανώς είναι κάτι το οποίο δεν μπορεί να αποφασιστεί εκ των προτέρων για όλες τις εφαρμογές αλλά αποτελεί επιλογή του διαχειριστή της βάσης, και εξαρτάται μεταξύ άλλων και από τους πόρους που διαθέτει το υπολογιστικό σύστημα (κεντρική και δευτερεύουσα μνήμη, ταχύτητα επεξεργασίας).

Η επιλογή των γραμμών που θα αποκοπούν είναι ένα πρόβλημα συνυφασμένο με το προηγούμενο. Προφανώς πρόκειται για πιθανούς κόσμους οι οποίοι περιέχουν πολλά αντιφατικά στοιχεία, και για τους οποίους εκτιμούμε ότι βρίσκονται πολύ μακριά από τον πραγματικό κόσμο και θα εξακολουθήσουν να βρίσκονται και στο

μέλλον, ανεξάρτητα από τις τυχόν νέες ενημερώσεις. Τέτοιες εκτιμήσεις είναι προφανώς αρκετά δύσκολες. Είναι όμως άμεση η σχέση με τον μετασχηματισμό επερωτήσεων. Στον μετασχηματισμό επερωτήσεων επιλέγαμε τους πιο αξιόπιστους πιθανούς κόσμους ώστε να τους εισάγουμε στην λογική πρόταση που θα αντιπροσωπεύσει την βάση μας, ενώ εδώ πρέπει να επιλέξουμε τους πιο αναξιόπιστους ώστε να τους αποκόψουμε από τον πίνακα της βάσης ή ισοδύναμα τους πιο αξιόπιστους ώστε να διατηρηθούν, αποκόπτωντας τους υπόλοιπους.

Η σωστή διαδικασία για να γίνει αυτό θα πρέπει να περνάει και πάλι μέσα από τις ποσότητες της αξιοπιστίας στοιχείων και γραμμών (RE, RL). Στην συνέχεια μπορούμε να ορίσουμε μία νέα συνάρτηση επιλογής γραμμών, την $LS^* \in \mathcal{F}_{LS}$, η οποία θα επιλέγει τις γραμμές που θα διατηρούνται στην βάση. Η εφαρμογή της συνάρτησης MS πάνω στον αρχικό πίνακα και το σύνολο που προέκυψε από την εφαρμογή της LS^* θα μας δώσει ένα νέο πίνακα, μικρότερου μεγέθους από τον αρχικό. Τελικά δηλαδή η διαδικασία της αποκοπής είναι η απλή εφαρμογή των 4 πρώτων βημάτων τις συνάρτησης QT, δηλαδή η εφαρμογή των συναρτήσεων αξιοπιστίας στοιχείου (RE), αξιοπιστίας γραμμής (RL), επιλογής γραμμών (LS^*) και επιλογής υποπίνακα (MS). Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση επιλογής γραμμών δεν είναι απαραίτητα η ίδια που χρησιμοποιείται στον μετασχηματισμό QT. Λογικά, η συνάρτηση LS θα πρέπει να είναι πιο «αυστηρή» στην επιλογή των γραμμών, δεδομένου ότι επιλέγει τις γραμμές για την εκτέλεση επερωτήσεων, όπου θέλουμε μόνο κόσμους οι οποίοι να είναι πολύ κοντά στην πραγματικότητα. Η LS^* επιλέγει όλους τους κόσμους, εκτός αυτών που βρίσκονται πολύ μακριά από την πραγματικότητα, διότι αν ένας κόσμος αποκοπεί από την βάση, δεν υπάρχει τρόπος να ανακτηθεί αν εκ των υστέρων αποδειχθεί σωστός.

Η διαδικασία της αποκοπής είναι μία διαδικασία η οποία προκαλεί απώλεια πληροφορίας από την βάση. Για τον λόγο αυτό η χρήση της είναι στην διακριτική ευχέρεια του διαχειριστή συστήματος, όπως και η συχνότητα χρήσης της. Μπορεί για παράδειγμα να εκτελείται μετά από κάθε ενημέρωση, ή όταν το μέγεθος της βάσης ξεπεράσει κάποιο όριο ή περιοδικά (πχ ημερησίως). Οι γραμμές που απορρίπτονται (συνάρτηση LS^*) μπορεί να είναι μία παράμετρος μεταβαλλόμενη, διότι για παράδειγμα μία αναβάθμιση του υποκείμενου υπολογιστικού συστήματος μπορεί να κάνει την ανάγκη για μικρό μέγεθος βάσης λιγότερο επιτακτική. Πάντως η συνάρτηση LS^* αποτελεί ούτως ή άλλως παράμετρο καθοριζόμενη από τον διαχειριστή του συστήματος.

Η μέθοδος της αποκοπής μπορεί να βελτιώσει την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου δραματικά, αν είμαστε διατεθειμένοι να θυσιάσουμε κάποια από την ακρίβεια της γνώσης μας. Σαν ένα ακραίο παράδειγμα, υποθέστε ότι η συνάρτηση LS^* κρατάει τις M πιο αξιόπιστες γραμμές του πίνακα αποκόπτωντας τις υπόλοιπες,

όπου $M \in \mathbb{N}^*$ κάποιος σταθερός αριθμός, και ότι εφαρμόζεται μετά από κάθε ενημέρωση. Τότε η πολυπλοκότητα της κάθε νέας ενημέρωσης, έστω με n' γραμμές και m στήλες θα είναι: $\Theta(M \cdot n' \cdot m) = \Theta(n' \cdot m)$, δηλαδή ανεξάρτητη του πλήθους των ενημερώσεων και ανάλογη του μεγέθους του πίνακα ενημέρωσης.

Ο υπολογισμός του μεγέθους μνήμης που απαιτείται για την αποθήκευση της βάσης είναι απλός με βάση την παραπάνω ανάλυση. Προφανώς, για ένα πίνακα βάσης με n γραμμές και m στήλες απαιτούνται $\Theta(m \cdot n)$ bits μνήμης. Σε ειδικές περιπτώσεις (για παράδειγμα αραιοί πίνακες), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε προχωρημένες τεχνικές αποθήκευσης με δείκτες ώστε να έχουμε μείωση των αποθηκευτικών απαιτήσεων. Σε κάθε περίπτωση πάντως, η μέθοδος της αποκοπής βελτιώνει την κατάσταση, αφού μειώνει το μέγεθος του πίνακα.

Μία άλλη συχνή διαδικασία της οποίας θα μας ενδιέφερε η πολυπλοκότητα είναι ο μετασχηματισμός επερωτήσεων. Δυστυχώς, ο υπολογισμός της πολυπλοκότητας του αλγορίθμου υπολογισμού της λογικής πρότασης QT(A) για κάποιο πίνακα A δεν μπορεί να γίνει αν δεν οριστούν πρώτα οι παράμετροι της συνάρτησης QT, δηλαδή οι συναρτήσεις RE, RL, LS. Εν γένει πάντως, είναι προφανές ότι όσο μικραίνει το μέγεθος του πίνακα της βάσης, τόσο καλύτερη θα γίνεται η ταχύτητα εκτέλεσης του μετασχηματισμού QT, συνεπώς η μέθοδος της αποκοπής βοηθάει και σε αυτή την περίπτωση.

Τέλος, η ίδια η διαδικασία της αποκοπής απαιτεί κάποιο χρόνο. Ισχύουν και εδώ ανάλογες παρατηρήσεις με αυτές που αναφέραμε στην περίπτωση του μετασχηματισμού QT. Όσο μικρότερος είναι ο πίνακας A, τόσο ταχύτερα εκτελείται η αποκοπή, αλλά η ακριβής πολυπλοκότητα μπορεί να υπολογιστεί μόνο δοθέντων των παραμέτρων RE, RL, LS^*.

6.5 Εξομοίωση Αλγορίθμου Dalal

Είδαμε ότι η γενικότητα ορισμού των παραμέτρων του μετασχηματισμού επερωτήσεων επιτρέπει τον ορισμό μίας ολόκληρης κλάσης αλγορίθμων οι οποίοι λύνουν το πρόβλημα των ενημερώσεων γνωσιακών βάσεων. Κάποιοι από αυτούς είναι προφανώς καλύτεροι από κάποιους άλλους, αλλά ο εντοπισμός των βέλτιστων είναι αρκετά δύσκολη διαδικασία.

Ένα παρόμοιο πρόβλημα είναι ο εντοπισμός των παραμέτρων κάτω από τις οποίες ο αλγόριθμος δουλεύει με τρόπο αντίστοιχο με τον τρόπο που δουλεύει κάποιος αλγόριθμος αναθεώρησης πεποιθήσεων της βιβλιογραφίας ή, ισοδύναμα, ο εντοπισμός υπαρχόντων αλγορίθμων οι οποίοι να ανήκουν στην κλάση αλγορίθμων που προτείνουμε, καθώς και οι παράμετροι υπό τις οποίες συμβαίνει αυτό.

Γενικά, απόλυτη ταύτιση είναι μάλλον δύσκολο να επιτευχθεί, λόγω των διαφορετικών υποθέσεων εργασίας κάθε αλγορίθμου, καθώς και της διαφορετικής

αναπαράστασης που χρησιμοποιείται (πίνακες έναντι λογικών προτάσεων). Παρόλα αυτά, μπορεί να αποδειχθεί ότι ο αλγόριθμος του Dalal ([8, 9]) είναι, υπό συγκεκριμένες υποθέσεις εργασίας, μέλος της κλάσης αλγορίθμων που προτείνουμε.

Όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 2, ο αλγόριθμος του Dalal θεωρεί ότι όλη η γνώση της βάσης συμπυκνώνεται σε μία λογική πρόταση. Εμμέσως εννοείται ότι και όλες οι συνέπειές της είναι μέλη της γνώσης μας. Για μία βάση ψ και μία ενημέρωση μ, ο Dalal επιλέγει οι ερμηνείες της αναθεωρημένης βάσης ψ' να είναι οι ερμηνείες της ενημέρωσης μ οι οποίες είναι πλησιέστερα στις ερμηνείες της βάσης ψ. Η απόσταση μεταξύ ερμηνειών κατά τον Dalal ορίζεται σαν το πλήθος των ατόμων των οποίων οι αληθοτιμές διαφέρουν στις δύο ερμηνείες.

Ο Dalal χρησιμοποιεί λογικές προτάσεις, συνεπώς είναι απαραίτητη η εφαρμογή του μετασχηματισμού TT ώστε να μετατρέψουμε τις λογικές προτάσεις στους αντίστοιχους πίνακες. Προκειμένου να έχουμε απλή μετατροπή, θα υποθέσουμε ότι κάθε λογική πρόταση που εισάγεται σαν ενημέρωση στην βάση γνώσης, όπως και η ίδια η βάση γνώσης, είναι μη αντιφατικές λογικές προτάσεις σε DNF. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανονικό μετασχηματισμό TT όπως ορίστηκε με μη αυστηρό τρόπο στην αρχή του κεφαλαίου 4 και με αυστηρότερο τρόπο στο παράρτημα Α, ορισμός Α.4. Στο παράρτημα Α υπάρχει ο ορισμός των πράξεων $\vee$, $\wedge$, $\neg$ για τον οποίο ο μετασχηματισμός TT για προτάσεις σε DNF δίνει ίδια αποτελέσματα με την διαδικασία που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 4, καθώς και η σχετική απόδειξη (πρόταση Α.5).

Προκειμένου να εξομοιώσουμε τον αλγόριθμο του Dalal καταρχήν πρέπει να δούμε πώς θα τίθενται οι δείκτες αξιοπιστίας για την βάση και την ενημέρωση. Επειδή ο Dalal χρησιμοποιεί λογικές προτάσεις δεν χρησιμοποιεί την έννοια της αξιοπιστίας, οπότε θα θέσουμε την τιμή 1 για τους δείκτες αξιοπιστίας όλων των ατόμων της βάσης. Για τον πίνακα ενημέρωσης, επειδή πρέπει να ικανοποιείται η αρχή προτεραιότητας ενημέρωσης, πρέπει να θέσουμε σαν δείκτη αξιοπιστίας μία μεγαλύτερη τιμή, έστω 2.

Η δεύτερη σημαντική παράμετρος είναι οι συναρτήσεις αξιοπιστίας γραμμής και στοιχείου. Ο Dalal μετράει την απόσταση μεταξύ δύο ερμηνειών σαν το πλήθος των ατόμων των οποίων οι αληθοτιμές διαφέρουν μεταξύ των δύο ερμηνειών. Επεκτείνοντας τον παραπάνω ορισμό για ελάχιστους όρους, η απόσταση είναι το πλήθος των ατόμων που εμφανίζονται ως κατάφαση στον ένα και ως άρνηση στον άλλο.

Οι ελάχιστοι όροι ως γνωστόν αντιπροσωπεύονται από πίνακες-γραμμή. Αν υπολογίσουμε τους σχετικούς πίνακες-γραμμή και πάρουμε το άθροισμά τους, θα προκύψει ένας τρίτος πίνακας-γραμμή. Στον νέο πίνακα θα υπάρχουν αντιφάσεις (αντιφατικά στοιχεία) στα άτομα τα οποία εμφανίζονται ως κατάφαση στον ένα

πίνακα και άρνηση στον άλλο. Μετρώντας λοιπόν το πλήθος των αντιφατικών ατόμων της γραμμής, έχουμε υπολογίσει την απόστασή τους κατά Dalal.

Θέτουμε την αξιοπιστία ενός στοιχείου ίση με 0 όταν υπάρχει αντίφαση και ίση με 1 όταν δεν υπάρχει. Έτσι, αν πάρουμε το άθροισμα των αξιοπιστιών των στοιχείων του παραπάνω πίνακα-γραμμής θα πάρουμε το πλήθος των μη αντιφατικών στοιχείων του πίνακα. Δεδομένου ότι το άθροισμα του πλήθους των μη αντιφατικών στοιχείων με το πλήθος των αντιφατικών είναι σταθερό και ίσο με το πλήθος των στηλών (και στοιχείων) του πίνακα-γραμμής, έχουμε ότι όσο αυξάνει η απόσταση μεταξύ δύο ελάχιστων όρων, τόσο μικραίνει η αξιοπιστία της μοναδικής γραμμής του αθροίσματος των αντίστοιχών τους πινάκων-γραμμής (και αντίστροφα).

Με βάση το παραπάνω σχόλιο, είναι σαφές ότι η συνάρτηση επιλογής γραμμών σε ένα πίνακα με περισσότερες από μία γραμμές θα πρέπει να επιλέγει την γραμμή μέγιστης αξιοπιστίας. Σε περίπτωση που υπάρχουν περισσότερες από μία με αυτήν την ιδιότητα, επιλέγονται όλες. Με ένα τέτοιο ορισμό, οι προς επιλογή πιθανοί κόσμοι θα ικανοποιούνται από τις ερμηνείες που θα επέλεγε και ο Dalal στον αλγόριθμό του. Έτσι, για τον παραπάνω τρόπο ορισμού των παραμέτρων του μετασχηματισμού QT παίρνουμε έναν αλγόριθμο του οποίου το αποτέλεσμα είναι ισοδύναμο του αποτελέσματος του Dalal.

Στα παραπάνω σκιαγραφήσαμε τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η εξομοίωση του αλγορίθμου του Dalal. Στο παράρτημα Α, προτάσεις Α.7, Α.8, Α.9, προτείνουμε κάποιες συναρτήσεις για τις παραμέτρους RE, RL, LS του μετασχηματισμού QT, παρόμοιες με αυτές που χρησιμοποιήσαμε στα παραπάνω, αλλά αυστηρότερα ορισμένες. Για την εξομοίωση του αλγορίθμου του Dalal, ισχύει η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 6.1

Έστω $p, q \in L^*$ δύο ικανοποιήσιμες προτάσεις σε DNF και έστω $r \in L^*$, το αποτέλεσμα της αναθεώρησης της p με την q με τον αλγόριθμο του Dalal, δηλαδή $r = p \bullet^D q$. Επιπλέον, έστω $P \in \mathbb{C}^{*\times n}$ ο πίνακας που αντιστοιχεί στην p με αξιοπιστία 1 για όλα τα άτομα ($P = TT(p)$) και $Q \in \mathbb{C}^{*\times n}$ ο πίνακας που αντιστοιχεί στην q με αξιοπιστία 2 για όλα τα άτομα ($Q = 2 \cdot TT(q)$), όπου η συνάρτηση TT είναι όπως ορίζεται στο παράρτημα Α, ορισμός Α.4. Τέλος, έστω οι συναρτήσεις RE, RL και LS όπως ορίζονται στο παράρτημα Α, προτάσεις Α.7, Α.8 και Α.9 αντίστοιχα. Τότε, για τον πίνακα R που προκύπτει από την αναθεώρηση του P από τον Q υπό το δικό μας μοντέλο ($R = P \bullet Q$) και για τις παραπάνω παραμέτρους, ισχύει ότι $QT(R) \cong r$.

Απόδειξη

Η πλήρης απόδειξη είναι αρκετά μακροσκελής και προϋποθέτει την απόδειξη κάποιων λημμάτων. Οι σχετικές διατυπώσεις και αποδείξεις υπάρχουν στο παράρτημα Α.

Η παραπάνω πρόταση μας λέει ουσιαστικά ότι η λογική έκφραση που θα προκύψει από την αναθεώρηση κατά Dalal είναι ισοδύναμη με την λογική έκφραση που θα χρησιμοποιηθεί στα ερωτήματα αν κάνουμε ενημέρωση με το δικό μας μοντέλο. Λόγω της ισοδυναμίας αυτής, η απάντηση σε οποιαδήποτε ερώτημα θα είναι ίδια, άρα, για τον χρήστη, οι δύο μέθοδοι ενημερώσεων είναι ταυτόσημες. Με άλλα λόγια, δίνεται ο τρόπος που πρέπει να ερμηνεύσουμε το αποτέλεσμα μίας ενημέρωσης με πίνακες ώστε να δίνει αποτελέσματα ισοδύναμα της αναθεώρησης κατά Dalal. Προφανώς αυτό συμβαίνει για συγκεκριμένες επιλογές παραμέτρων και όχι για οποιονδήποτε από τους αλγορίθμους της κλάσης μας, και οι παράμετροι αυτές αναφέρονται στην παραπάνω πρόταση. Πάντως η παραπάνω επιλογή των παραμέτρων δεν είναι μοναδική.

Επίσης, πολύ σημαντικές είναι οι προϋποθέσεις της πρότασης σχετικά με την μορφή των προτάσεων p, q. Δεν έχει μελετηθεί η περίπτωση όπου οι p, q δεν είναι σε DNF, ούτε η περίπτωση της αναθεώρησης με κάποια μη ικανοποιήσιμη πρόταση. Τέλος, επειδή ο Dalal δεν λαμβάνει υπόψη του την περίπτωση μαζικών ενημερώσεων, αυτή η περίπτωση δεν έχει ληφθεί υπόψη ούτε στην πρόταση 6.1. Αν εκτελέσουμε δεύτερη ενημέρωση πάνω στο αποτέλεσμα της πρώτης, τότε οι προϋποθέσεις της πρότασης 6.1 για την μορφή του πίνακα βάσης P δεν πληρούνται, οπότε η πρόταση δεν ισχύει. Για να εκτελέσουμε πολλαπλές ενημερώσεις, απαιτείται κάποιου είδους μετατροπή του πίνακα που προκύπτει από κάθε ενημέρωση πριν την εκτέλεση της επόμενης, ώστε να πληρούνται οι υποθέσεις της πρότασης. Η αναζήτηση των παραμέτρων υπό τις οποίες δεν είναι απαραίτητες οι παραπάνω προϋποθέσεις είναι ένα ενδιαφέρον αντικείμενο τρέχουσας μελέτης.

6.6 Πίνακες και Προτασιακός Λογισμός

Λόγω της μορφής του μετασχηματισμού πινάκων και κυρίως της πρότασης 4.6 (ισότητα μοντέλων πινάκων-λογικών προτάσεων) είναι πιθανό οι πίνακες να φανούν χρήσιμοι στην μελέτη προβλημάτων του κλασικού προτασιακού λογισμού ή σε εφαρμογές του. Η διαφορετική οπτική που παρέχει σχετικά με την ικανοποιησιμότητα και την απεικόνιση λογικών εκφράσεων σε συνδυασμό με την δυνατότητα να αναφερόμαστε σε λογικές προτάσεις με όρους της θεωρίας πινάκων και των μιγαδικών αριθμών μπορεί να δώσουν ιδέες για λύσεις σε προβλήματα λογικής.

Ο μετασχηματισμός πινάκων αν χρησιμοποιηθεί για προβλήματα λογικής έχει αξία λόγω της μορφής απεικόνισης. Οι δείκτες αξιοπιστίας και η ένταση των διαφόρων πεποιθήσεων χάνουν την αξία τους, αφού στην καθαρή λογική δεν υπάρχει η έννοια της έντασης πεποίθησης. Επίσης, δεν υπάρχει λόγος χρήσης της αρνητικής γνώσης. Άρα λοιπόν, οι πίνακες έχουν μεγαλύτερη εκφραστική δύναμη από όση

χρειάζονται τα προβλήματα λογικής. Στις εφαρμογές της λογικής στις οποίες η ένταση της πεποίθησης μετράει, όπως για παράδειγμα στην αναθεώρηση πεποιθήσεων, η επιπλέον εκφραστικότητα μπορεί να δώσει λύσεις. Στα υπόλοιπα προβλήματα, μπορεί απλά να αγνοηθεί.

Ένα αποτέλεσμα το οποίο βοηθάει στον ελέγχο ικανοποιησιμότητας, χρησιμοποιεί την πράξη του γινομένου πινάκων. Έστω ότι διαθέτουμε δύο ελάχιστους όρους. Τότε τα σύνολα μοντέλων των όρων αυτών έχουν μη κενή τομή αν και μόνο αν δεν υπάρχει κανένα άτομο το οποίο να εμφανίζεται ως κατάφαση στον ένα όρο και ως άρνηση στον άλλο. Ας υποθέσουμε ότι τους μετατρέπουμε σε πίνακες με την κλασική μέθοδο που περιγράψαμε στην αρχή του κεφαλαίου 4 (βλ. και παράρτημα Α, ορισμός Α.4 και πρόταση Α.5). Ονομάζουμε P τον ένα πίνακα και Q τον άλλο, οπότε το γινόμενό του P με τον ανάστροφο του Q ($R=P\cdot Q^T$) ορίζεται και δίνει ένα πίνακα R ο οποίος είναι 1X1.

Το σημαντικό στον παραπάνω πίνακα R είναι ότι το μοναδικό στοιχείο του θα προκύψει σαν άθροισμα κάποιων γινομένων. Κάθε τέτοιο γινόμενο θα είναι μεταξύ δύο αριθμών του συνόλου {0, 1, i}, και θα αντιπροσωπεύει το γινόμενο της αξιοπιστίας του ίδιου ατόμου μεταξύ των δύο όρων. Αν η αξιοπιστία είναι η ίδια (1 και 1 ή i και i) ή αν η μία από τις δύο αξιοπιστίες είναι 0, τότε το αποτέλεσμα θα είναι κάποιος πραγματικός. Αν όχι, τότε το αποτέλεσμα θα είναι ο αριθμός i ($1\cdot i=i\cdot 1=i$). Άρα λοιπόν, το άθροισμα των παραπάνω γινομένων θα είναι κάποιος πραγματικός αριθμός αν και μόνο αν δεν υπάρχει άτομο το οποίο να εμφανίζεται σαν κατάφαση στον ένα ελάχιστο όρο και σαν άρνηση στον άλλο. Τα παραπάνω σκιαγραφούν την απόδειξη της παρακάτω γενικότερης πρότασης:

Πρόταση 6.2

Έστω ο μετασχηματισμός TT όπως ορίζεται στο παράρτημα Α, ορισμός Α.4, και έστω δύο ικανοποιήσιμες προτάσεις p, $q\in L^*$ σε DNF. Τότε η πρόταση $p\wedge q$ είναι ικανοποιήσιμη αν και μόνο αν ο πίνακας $TT(p)\cdot(TT(q)^T)$ περιέχει πραγματικό αριθμό, δηλαδή στοιχείο $z\in\mathbb{C}$ για το οποίο $Im(z)=0$.

Απόδειξη

Βλ. παράρτημα Α.

Η πρόταση αυτή είναι σημαντική για διάφορους λόγους. Καταρχήν, μας δίνει άμεσα έναν έλεγχο για το αν τα σύνολα μοντέλων δύο προτάσεων έχουν μη κενή τομή. Δεύτερον, μας δίνει έναν εύκολο έλεγχο ικανοποιησιμότητας. Αν αντί για τον πίνακα TT(p) (ή TT(q)) χρησιμοποιήσουμε ένα πίνακα-ερμηνεία, ουσιαστικά ελέγχουμε αν ο πίνακας (ή ισοδύναμα η λογική πρόταση) ικανοποιείται από την αντίστοιχη ερμηνεία του πίνακα-ερμηνεία. Επιπλέον, το σημείο στον πίνακα (γραμμή και στήλη) στο οποίο υπάρχει ο πραγματικός αριθμός μας ορίζει τους ελάχιστους

όρους (των DNF εκφράσεων) των οποίων τα σύνολα μοντέλων έχουν μη κενή τομή ή ισοδύναμα τα ζεύγη των γραμμών των πινάκων TT(p), TT(q) στα οποία δεν υπάρχει αντίφαση.

Η παραπάνω πρόταση είναι ενδεικτική των δυνατοτήτων της αναπαράστασης πινάκων στην επίλυση προβλημάτων του κλασικού προτασιακού λογισμού. Η ανάπτυξη και απόδειξη παρόμοιων προτάσεων καθώς και κάποιες πιθανές εφαρμογές τέτοιων προτάσεων είναι θέματα τα οποία θα μπορούσαν να μελετηθούν στο μέλλον.

Κεφάλαιο 7: Επίλογος

7.1 Σύντομη Περίληψη της Μεθόδου

Στα προηγούμενα κεφάλαια μελετήσαμε το πρόβλημα της αναθεώρησης πεποιθήσεων, για πεποιθήσεις εκφρασμένες με την βοήθεια προτάσεων του προτασιακού λογισμού. Αναπτύξαμε μία μέθοδο βασισμένη όχι στον προτασιακό λογισμό αλλά σε μία τεχνική αναπαράστασης γνώσης με την βοήθεια πινάκων μιγαδικών αριθμών. Είδαμε την σημασιολογία της αναπαράστασης αυτής και την ευκολία με την οποία μας επιτρέπει να εκτελούμε αναθεωρήσεις. Όπως είδαμε, το βασικότερο, δυσκολότερο και πιο ενδιαφέρον κομμάτι της αναθεώρησης γνώσης με το μοντέλο μας δεν είναι η ενημέρωση αυτή καθαυτή, αλλά η ερμηνεία του αποτελέσματος της ενημέρωσης διαμέσου του μετασχηματισμού επερωτήσεων.

Επίσης, με την βοήθεια των πινάκων, πετύχαμε την ποσοτικοποίηση της γνώσης, για προτασιακές βάσεις γνώσης. Το γεγονός αυτό παρέχει δυνατότητες οι οποίες δεν ήταν ως τώρα διαθέσιμες, όπως η έκφραση της αρνητικής γνώσης, η ενοποίηση των διαφόρων τύπων ενημέρωσης και η ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων μέτρησης της «έντασης» πεποίθησης και αντίστοιχα της αξιοπιστίας πεποιθήσεων, παρατηρήσεων, μετρήσεων, συμπερασμάτων, πιθανών κόσμων κοκ.

Προσφέραμε την δυνατότητα ισχυρής παραμετροποίησης του μοντέλου μας, η οποία στην πράξη παρέχει τον ορισμό μίας ολόκληρης κλάσης αλγορίθμων. Όλοι οι αλγόριθμοι της κλάσης αυτής, έχουν κάποιες ενδιαφέρουσες και επιθυμητές ιδιότητες, τις οποίες μελετήσαμε. Επίσης, υπάρχει στενή σχέση μεταξύ της μεθόδου μας και του αλγορίθμου αναθεώρησης πεποιθήσεων του Dalal ([8, 9]), αφού ο αλγόριθμος αυτός αποτελεί, υπό κάποιες συγκεκριμένες υποθέσεις εργασίας, μέλος της παραπάνω κλάσης. Η εξάρτηση που παρέχεται από τις παραμέτρους του αλγορίθμου αποτελεί δείγμα ευελιξίας και επεκτασιμότητας. Η πολυπλοκότητα της μεθόδου είναι αποδεκτή και μπορεί να βελτιωθεί με την χρήση της μεθόδου της αποκοπής, η οποία όμως προκαλεί απώλεια πληροφορίας.

Λόγω της φύσης της παραπάνω αναπαράστασης, υπάρχει ένα είδος αντιστοίχισης με τον προτασιακό λογισμό. Από τον ορισμό των ερμηνειών πινάκων και της δυνατότητας σύγκρισης που υπάρχει μεταξύ του συνόλου μοντέλων ενός πίνακα και του συνόλου μοντέλων μίας λογικής έκφρασης, είναι δυνατή η διατύπωση όλων των προβλημάτων του κλασικού προτασιακού λογισμού με όρους της αναπαράστασης πινάκων. Έτσι, πέρα από την εφαρμογή της στο πρόβλημα της

αναθεώρησης πεποιθήσεων, η εν λόγω αναπαράσταση θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στην μελέτη προβλημάτων του προτασιακού λογισμού, ή σε εφαρμογές του.

7.2 Ανοιχτά Προβλήματα

Ήδη από τα προηγούμενα κεφάλαια διατυπώσαμε κάποια προβλήματα προς μελλοντική εργασία. Τέτοια ήταν:

- Η εύρεση των βέλτιστων ανά εφαρμογή παραμέτρων για τον αλγόριθμο ενημέρωσης πεποιθήσεων. Οι παράμετροι αυτές περιλαμβάνουν τον ορισμό πράξεων μεταξύ πινάκων που να ανήκουν στις σχετικές κλάσεις ($\mathcal{F}_{\vee}$, $\mathcal{F}_{\wedge}$, $\mathcal{F}_{\neg}$), τον ορισμό των δεικτών αξιοπιστίας RF, τον ορισμό των συναρτήσεων RE$\in\mathcal{F}_{\mathrm{RE}}$, RL$\in\mathcal{F}_{\mathrm{RL}}$ και LS$\in\mathcal{F}_{\mathrm{LS}}$, την απόφαση ως προς την χρήση ή μη της αποκοπής, την συχνότητα χρήσης της και τον ορισμό της σχετικής συνάρτησης LS$^{*}\in\mathcal{F}_{\mathrm{LS}}$.
- Η βελτίωση της εξομοίωσης του αλγορίθμου του Dalal και η διατύπωση των παραμέτρων υπό τις οποίες ικανοποιούνται άλλοι αλγόριθμοι της βιβλιογραφίας.
- Η διατύπωση και απόδειξη προτάσεων οι οποίες θα αποκαλύψουν σχέσεις μεταξύ πινάκων και προτασιακού λογισμού τις οποίες δεν έχουμε εντοπίσει. Τέτοιες προτάσεις μπορεί να βοηθήσουν στην μοντελοποίηση προβλημάτων του προτασιακού λογισμού ή εφαρμογών του.
- Η ανάπτυξη ενός αλγορίθμου επερωτήσεων ο οποίος θα επιδρά μεταξύ πινάκων, χωρίς να χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός επερωτήσεων. Ένας τέτοιος αλγόριθμος μπορεί να φανεί ιδιαίτερα χρήσιμος σε περιβάλλοντα όπου χρησιμοποιούνται μη δίτιμες λογικές (πχ ασαφής λογική).

Πέρα από τα παραπάνω προβλήματα, υπάρχουν και άλλα τα οποία θα μπορούσαμε να μελετήσουμε, όπως:

- Η προσπάθεια επέκτασης του μετασχηματισμού πινάκων ή η ανάπτυξη κάποιας παραλλαγής του η οποία θα τον κάνει εφαρμόσιμο σε άλλες μορφές λογικής, πέραν της προτασιακής.
- Η διατύπωση γενικών ιδιοτήτων και συνθηκών υπό τις οποίες αλγόριθμοι της κλάσης που προτείνουμε πληρούν κάποιες ιδιότητες (πχ αξιώματα AGM, αρχές ενημέρωσης Dalal κοκ).
- Η υλοποίηση του παραπάνω αλγορίθμου για συγκεκριμένες παραμέτρους και η περαιτέρω μελέτη των ιδιοτήτων του σε πρακτικό επίπεδο (εφαρμογών).
- Η μελέτη θεμάτων που έχουν να κάνουν με την παραπάνω υλοποίηση, όπως η βελτιστοποίηση σε θέματα ταχύτητας, απαιτήσεων σε μνήμη κτλ.

Για το πρώτο πρόβλημα, αυτό της επέκτασης του μετασχηματισμού πινάκων, θα είχε ενδιαφέρον να δούμε αν μπορεί ο μετασχηματισμός αυτός να επεκταθεί σε άλλες μορφές λογικής, δεδομένου ότι ο προτασιακός λογισμός παρέχει περιορισμένες δυνατότητες αναπαράστασης γνώσης. Το δεύτερο αποτελεί ένα ενδιαφέρον θεωρητικό πρόβλημα, το οποίο θα βοηθήσει στην τεκμηρίωση της μεθόδου.

Τα δύο τελευταία προβλήματα είναι παρεμφερή, αφού έχουν σχέση με την υλοποίηση του αλγορίθμου. Στην εργασία αυτή μελετήσαμε το πρόβλημα της αναθεώρησης πεποιθήσεων σε θεωρητικό επίπεδο, χωρίς να μπούμε στην μελέτη προβλημάτων που έχουν σχέση με την υλοποίηση. Παρόλα αυτά, υπάρχουν πολλά πρακτικής φύσεως θέματα τα οποία έχουν ενδιαφέρον.

Καταρχήν, η αποθήκευση των πινάκων θα μπορούσε να γίνει με διαφορετικούς τρόπους, όπως για παράδειγμα με την μορφή συνδεδεμένων λιστών για μικρότερες απαιτήσεις στην μνήμη. Η προσέγγιση αυτή βοηθάει και στην περίπτωση που έχουμε γλώσσες με άπειρο πλήθος ατόμων, οπότε το πλήθος των στηλών των πινάκων μπορεί να μεταβάλλεται από ενημέρωση σε ενημέρωση. Ενδιαφέρον θα είχε ενδεχομένως και ο ορισμός κάποιου είδους διάταξης μεταξύ πιθανών κόσμων (γραμμών) και η ταξινόμησή τους, για ταχύτερη αναζήτηση.

Επίσης, στον αλγόριθμό μας, η είσοδος (ενημερώσεις) είναι υπό την μορφή πινάκων. Ένας μέσος χρήστης δεν είναι υποχρεωμένος να γνωρίζει την σχετική θεωρία, για αυτό θα πρέπει να αναπτυχθεί ένα ενδιάμεσο σύστημα, το οποίο θα αναλαμβάνει τον ρόλο της επιφάνειας χρήσης. Το σύστημα αυτό θα πρέπει να μπορεί να διαγνώσει τις προθέσεις του χρήστη, τόσο ως προς την γνώση που επιθυμεί να εισάγει στην βάση, όσο και ως προς την αξιοπιστία των διαφόρων ατόμων στη γνώση αυτή, χρησιμοποιώντας ένα φιλικό προς τον χρήστη σύστημα ερωταποκρίσεων. Στην συνέχεια, η πληροφορία αυτή θα πρέπει να μετατρέπεται σε πίνακες και να εισάγεται στην βάση με τον τρόπο που περιγράψαμε.

Τέλος, ένα σημαντικό θέμα που θα μπορούσε να βελτιώσει την απόδοση του αλγορίθμου είναι η παραλληλοποίησή του. Φαίνεται εύκολα ότι από την φύση του ο αλγόριθμός μας μπορεί να «σπάσει» σε ανεξάρτητα μεταξύ τους κομμάτια (διεργασίες), οι οποίες ελάχιστη επικοινωνία πρέπει να έχουν, τόσο στο κομμάτι των ενημερώσεων, όσο και στο κομμάτι των επερωτήσεων. Έτσι θα μπορούσαμε να έχουμε μία πατρική (master) διεργασία, η οποία να αναλαμβάνει το ρόλο της διεπιφάνειας χρήσης (user interface) και κάποιες θυγατρικές (slave) διεργασίες, οι οποίες θα αποθηκεύουν ένα μέρος (κάποιες γραμμές) του πίνακα βάσης. Η κάθε θυγατρική διεργασία θα εκτελεί ενημερώσεις με τους πίνακες που λαμβάνει από την πατρική διεργασία σαν να ήταν η μοναδική διεργασία του συστήματος. Για τις επερωτήσεις, αρκεί να στέλνονται από κάθε διεργασία στην πατρική οι βέλτιστοι πιθανοί κόσμοι, μαζί με τις σχετικές αξιοπιστίες. Αυτοί θα φιλτράρονται περαιτέρω από την πατρική διεργασία ώστε να βρεθούν οι συνολικά βέλτιστοι. Η αποκοπή

μπορεί να εκτελείται με τρόπο ανάλογο του μετασχηματισμού επερωτήσεων. Όλη η επικοινωνία θα λαμβάνει χώρα διαμέσου μίας δενδροειδούς δομής για λόγους μείωσης των απαιτήσεων επικοινωνίας. Τέλος, το σύστημα όπως περιγράφηκε μπορεί να παρέχει δυναμικότητα διαγραφής/δημιουργίας διεργασιών και μεταφοράς γραμμών μεταξύ διεργασιών. Έτσι τυχόν εφαρμογή της μεθόδου της αποκοπής δεν θα προκαλέσει ανισορροπία στο πλήθος των γραμμών που αποθηκεύονται μεταξύ των διαφόρων διεργασιών.

7.3 Συνεισφορά της Εργασίας

Στην παρούσα εργασία αναπτύξαμε τον μετασχηματισμό πινάκων και χρησιμοποιήσαμε την εκφραστική του υπεροχή σε σχέση με τον προτασιακό λογισμό στα προβλήματα της αναπαράστασης γνώσης και της αναθεώρησης πεποιθήσεων. Ο μετασχηματισμός αυτός είναι μία ισχυρή, εναλλακτική αναπαράσταση του προτασιακού λογισμού η οποία ενδέχεται να έχει και άλλες εφαρμογές.

Μελετήσαμε το πρόβλημα της αναθεώρησης πεποιθήσεων σε θεωρητικό επίπεδο μόνο, προτείνοντας ένα μοντέλο εργασίας το οποίο θεωρούμε πολύ κοντά στην ανθρώπινη διαίσθηση για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Υπάρχουν πολλά ανοιχτά πρακτικά προβλήματα στον τομέα της υλοποίησης, τα οποία θεωρούμε ότι θα είχε ενδιαφέρον να μελετηθούν.

Τέλος, η πληθώρα των προβλημάτων προς μελλοντική εργασία τα οποία αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα δείχνουν την δυναμική της εργασίας και τους ενδιαφέροντες ερευνητικούς ορίζοντες τους οποίους ανοίγει για περαιτέρω μελέτη.

Παράρτημα Α

Α.1 Αποδείξεις Κεφαλαίου 4

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε τις προτάσεις του κεφαλαίου 4 των οποίων την απόδειξη είχαμε παραλείψει.

Πρόταση 4.4

Έστω $A=[w_1\ w_2\ \dots\ w_n]\in\mathbb{C}^{1\times n}$. Τότε $mod(A)=I_1\times I_2\times\dots\times I_n$, όπου $\forall j\in\{1,2,\dots,n\}$ $I_j\subseteq\{0,1\}$ και:

- $0\in I_j$ ανν $w_j\in\mathbb{C}_-$
- $1\in I_j$ ανν $w_j\in\mathbb{C}_+$

Απόδειξη

Ορίζουμε το σύνολο $S=I_1\times I_2\times\dots\times I_n$, όπου τα I_j είναι όπως παραπάνω για $j=1,2,\dots,n$.
Θα δείξουμε ότι: $S=mod(A)$.
Για κάθε $j\in\{1,2,\dots,n\}$, είναι εμφανές ότι:

- $I_j=\{0\}$ ανν $w_j\in\mathbb{C}_-\setminus\mathbb{C}_+$ (αρνητικός, αλλά όχι θετικός)
- $I_j=\{1\}$ ανν $w_j\in\mathbb{C}_+\setminus\mathbb{C}_-$ (θετικός, αλλά όχι αρνητικός)
- $I_j=\{0,1\}$ ανν $w_j\in\mathbb{C}_0$ (θετικός και αρνητικός, δηλαδή μηδενικός)
- $I_j=\varnothing$ ανν $w_j\in\mathbb{C}\setminus(\mathbb{C}_+\cup\mathbb{C}_-)=\mathbb{C}_*$ (ούτε θετικός, ούτε αρνητικός, δηλαδή αντιφατικός)

Έστω $I=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in I(n)$ μία ερμηνεία.
Αν $I\in mod(A)$, τότε, λόγω του ορισμού 4.6:

$$\exists z_1, z_2, ..., z_n \in C^{(+)} : A = \sum_{j=1}^{n} [A_j((2\cdot a_j - 1)\cdot \overline{z_j})].$$

Από τον ορισμό των k-ατόμων (ορισμός 4.3), για κάθε $j\in\{1,2,\dots,n\}$ ισχύει:

$$w_j = 0 + ... + 0 + (2\cdot a_j - 1)\cdot \overline{z_j} + 0 + ... + 0 .$$

Άρα: $w_j = (2\cdot a_j - 1)\cdot \overline{z_j}$, για κάθε $j\in\{1,2,\dots,n\}$ (1).

Αρχικά, υποθέτουμε ότι:

$S=\varnothing\Leftrightarrow\exists\ j\in\{1,2,\dots,n\}: I_j=\varnothing\Leftrightarrow\exists\ j\in\{1,2,\dots,n\}: w_j\in\mathbb{C}_*$ (2).

Τότε, για $I\in mod(A)$, από την σχέση (1) σε συνδυασμό με το ότι $z_j\in\mathbb{C}^{(+)}$ και:

$\alpha_j \in \{0,1\} \Rightarrow (2\cdot\alpha_j - 1) \in \{1,-1\}$,

έχουμε ότι ένα από τα παρακάτω ισχύει:

- $Re(w_j) \le 0$, $Im(w_j) \ge 0 \Rightarrow Re(w_j)\cdot Im(w_j) \le 0$
- $Re(w_j) \ge 0$, $Im(w_j) \le 0 \Rightarrow Re(w_j)\cdot Im(w_j) \le 0$

Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση ισχύει: $Re(w_j)\cdot Im(w_j) \le 0$, αντίφαση διότι w_j: αντιφατικό από την υπόθεση, δηλαδή $Re(w_j)\cdot Im(w_j) > 0$.

Άρα, αν $S=\varnothing$, τότε δεν υπάρχει $I \in I(n)$ ώστε $I \in mod(A)$, άρα $mod(A)=\varnothing=S$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $S \neq \varnothing$ και $I \in S$.

Τότε $\alpha_j \in I_j$ για κάθε $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ (3).

Αν για κάποιο $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ ισχύει ότι $w_j \in \mathbb{C}_*$, τότε από την (2) προκύπτει $S=\varnothing$, αντίφαση.

Συνεπώς, για κάθε $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, $w_j \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$ (θετικός ή αρνητικός μιγαδικός).

Για κάθε $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

- Αν $w_j \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathbb{C}_-$ (θετικός αλλά όχι αρνητικός), τότε $Re(w_j) \ge 0$, $Im(w_j) \le 0$ και $w_j \neq 0$. Θέτουμε $z_j = \overline{w_j}$, οπότε: $Re(z_j) \ge 0$, $Im(z_j) \ge 0$, δηλαδή $z_j \in \mathbb{C}^{(+)}$. Στην περίπτωση αυτή, εξ ορισμού των I_j, προκύπτει $I_j=\{1\}$ και $\alpha_j \in I_j=\{1\}$ από την (3), άρα $\alpha_j=1$.
- Ομοίως, αν $w_j \in \mathbb{C}_- \setminus \mathbb{C}_+$ (αρνητικός αλλά όχι θετικός), τότε $Re(w_j) \le 0$, $Im(w_j) \ge 0$ και $w_j \neq 0$. Θέτουμε $z_j = -\overline{w_j}$, οπότε: $Re(z_j) \ge 0$, $Im(z_j) \ge 0$, δηλαδή $z_j \in \mathbb{C}^{(+)}$. Στην περίπτωση αυτή, εξ ορισμού των I_j, προκύπτει $I_j=\{0\}$ και $\alpha_j \in I_j=\{0\}$ από την (3), άρα $\alpha_j=0$.
- Τέλος, αν $w_j \in \mathbb{C}_0$ (θετικός και αρνητικός, δηλαδή μηδενικός), τότε $w_j=0$. Σε αυτή την περίπτωση θέτουμε $z_j=0 \in \mathbb{C}^{(+)}$. Επίσης, ισχύει ότι $I_j=\{0,1\}$ και $\alpha_j \in I_j=\{0,1\}$. Επομένως έχουμε είτε $\alpha_j=0$ ή $\alpha_j=1$.

Σε οποιαδήποτε από τις παραπάνω περιπτώσεις, για τα $z_j \in \mathbb{C}^{(+)}$ και $\alpha_j \in \{0,1\}$ όπως ορίστηκαν παραπάνω, επαληθεύεται εύκολα ότι για κάθε $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ ισχύει: $w_j = (2\cdot a_j - 1)\cdot \overline{z_j}$.

Συνεπώς για την ερμηνεία I και τα παραπάνω z_j, έχουμε ότι η συνθήκη του ορισμού ικανοποιησιμότητας (ορισμός 4.3), όπως επαναδιατυπώθηκε στην (1) ισχύει, άρα: $I \in mod(A) \Rightarrow S \subseteq mod(A)$.

Αντίστροφα, αν $mod(A)=\varnothing$, τότε λόγω της παραπάνω σχέσης υποσυνόλου προκύπτει ότι: $S \subseteq mod(A)=\varnothing \Rightarrow S=\varnothing=mod(A)$. Άρα ισχύει η σχέση $S=mod(A)$.

Αν $mod(A) \neq \varnothing$, τότε υποθέτουμε ότι η ερμηνεία $I \in mod(A)$. Ας υποθέσουμε ότι $I \notin S$. Τότε για κάποιο $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ ισχύει ότι $\alpha_j \notin I_j$. Για το συγκεκριμένο j ισχύει ότι:

- Αν $w_j \in \mathbb{C}_0$ τότε εξ ορισμού $I_j=\{0,1\}$. Λόγω του ότι $\alpha_j \in \{0,1\}$ προκύπτει $\alpha_j \in I_j$, άτοπο.
- Αν $w_j \in \mathbb{C}_*$ τότε εξ ορισμού $I_j=\varnothing$, άρα $S=\varnothing$. Αποδείξαμε ήδη ότι αν $S=\varnothing$ τότε $\text{mod}(A)=\varnothing$, άτοπο από την υπόθεση ότι $\text{mod}(A)\neq\varnothing$.
- Αν $w_j \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathbb{C}_-$ τότε εξ ορισμού $I_j=\{1\}$, οπότε σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $\alpha_j \in \{0,1\}$ και $\alpha_j \notin I_j$ προκύπτει ότι $\alpha_j=0$. Θέτωντας $\alpha_j=0$ στην (1), προκύπτει $w_j = -\overline{z_j}$. Αλλά $z_j \in \mathbb{C}^{(+)}$ άρα $\text{Re}(z_j)\geq 0$ και $\text{Im}(z_j)\geq 0$ συνεπώς $\text{Re}(w_j)\leq 0$ και $\text{Im}(w_j)\geq 0$ άρα τελικά $w_j \in \mathbb{C}_-$, άτοπο.
- Ομοίως, αν $w_j \in \mathbb{C}_- \setminus \mathbb{C}_+$, τότε εξ ορισμού $I_j=\{0\}$, οπότε σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $\alpha_j \in \{0,1\}$ και $\alpha_j \notin I_j$ προκύπτει ότι $\alpha_j=1$. Θέτωντας $\alpha_j=1$ στην (1), προκύπτει $w_j = \overline{z_j}$. Αλλά $z_j \in \mathbb{C}^{(+)}$ άρα $\text{Re}(z_j)\geq 0$ και $\text{Im}(z_j)\geq 0$ συνεπώς $\text{Re}(w_j)\geq 0$ και $\text{Im}(w_j)\leq 0$ άρα τελικά $w_j \in \mathbb{C}_+$, άτοπο.

Έτσι καταλήξαμε σε άτοπο σε κάθε περίπτωση, κάτι το οποίο σημαίνει ότι: $I \in S \Rightarrow \text{mod}(A) \subseteq S$.

Το παραπάνω γεγονός σε συνδυασμό με το $S \subseteq \text{mod}(A)$ δίνει $S=\text{mod}(A)$, και η απόδειξη είναι πλήρης.

Πρόταση 4.5

Έστω $m \in \mathbb{N}^*$ και $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Επιπλέον έστω ότι η ENF μορφή του A είναι:

$$A = (\sum_{j=1}^{n} A_j(z_{1j})) \,|\, (\sum_{j=1}^{n} A_j(z_{2j})) \,|\, \ldots \,|\, (\sum_{j=1}^{n} A_j(z_{mj})).$$

Τότε: $\text{mod}(A) = \bigcup_{k=1}^{m} \bigcap_{j=1}^{n} \text{mod}(A_j(z_{kj}))$.

Απόδειξη

Αρχικά, ας υποθέσουμε ότι $m=1 \in \mathbb{N}^*$. Τότε: $A = \sum_{j=1}^{n} A_j(z_{1j})$.

Για κάθε $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ και $z_{1j} \in \mathbb{C}$, ισχύει ότι $\text{mod}(A_j(z_{1j}))=I_{1j}\times I_{2j}\times\ldots\times I_{nj}$, όπου $I_{kj}=\{0,1\}$, για $k \in \{1,2,\ldots,n\}\setminus\{j\}$ και:

- $I_{jj}=\{0\}$ ανν $z_{1j} \in \mathbb{C}_- \setminus \mathbb{C}_+$
- $I_{jj}=\{1\}$ ανν $z_{1j} \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathbb{C}_-$
- $I_{jj}=\{0,1\}$ ανν $z_{1j} \in \mathbb{C}_0$
- $I_{jj}=\varnothing$ ανν $z_{1j} \in \mathbb{C}_*$

Επομένως:

$$\bigcup_{k=1}^{1}\bigcap_{j=1}^{n}\mathrm{mod}(A_j(z_{kj}))=\bigcap_{j=1}^{n}\mathrm{mod}(A_j(z_{1j}))=\bigcap_{j=1}^{n}(I_{1j}\times I_{2j}\times\ldots\times I_{nj})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\bigcup_{k=1}^{1}\bigcap_{j=1}^{n}\mathrm{mod}(A_j(z_{kj}))=(\bigcap_{j=1}^{n}I_{1j})\times(\bigcap_{j=1}^{n}I_{2j})\times\ldots\times(\bigcap_{j=1}^{n}I_{nj})\ (1).$$

Αλλά για κάθε k,j∈{1,2,…,n}, ισχύει ότι $I_{kj}=\{0,1\}$ όταν k≠j και $I_{kj}\subseteq\{0,1\}$ όταν k=j, συνεπώς:

$$(1)\Rightarrow\bigcup_{k=1}^{1}\bigcap_{j=1}^{n}\mathrm{mod}(A_j(z_{kj}))=I_{11}\times I_{22}\times\ldots\times I_{nn}\ (2).$$

Επιπλέον, $\mathrm{mod}(A)=I^{(1)}\times I^{(2)}\times\ldots\times I^{(n)}$, όπου για κάθε j∈{1,2,…,n} $I^{(j)}\subseteq\{0,1\}$ και:

- $I^{(j)}=\{0\}$ ανν $z_{1j}\in\mathbb{C}_-\backslash\mathbb{C}_+$
- $I^{(j)}=\{1\}$ ανν $z_{1j}\in\mathbb{C}_+\backslash\mathbb{C}_-$
- $I^{(j)}=\{0,1\}$ ανν $z_{1j}\in\mathbb{C}_0$
- $I^{(j)}=\varnothing$ ανν $z_{1j}\in\mathbb{C}_*$

Συνεπώς για κάθε j∈{1,2,…,n} έχουμε ότι $I_{jj}=I^{(j)}$, άρα:

$I^{(1)}\times I^{(2)}\times\ldots\times I^{(n)}=I_{11}\times I_{22}\times\ldots\times I_{nn}\Rightarrow$

$\mathrm{mod}(A)=\bigcup_{k=1}^{1}\bigcap_{j=1}^{n}\mathrm{mod}(A_j(z_{kj}))$, και η πρόταση αποδείχθηκε για m=1.

Στην γενική περίπτωση, για $m\in\mathbb{N}^*$, από τον ορισμό 4.6 έχουμε:

$$\mathrm{mod}(A)=\mathrm{mod}((\sum_{j=1}^{n}A_j(z_{1j}))\,|\,(\sum_{j=1}^{n}A_j(z_{2j}))\,|\ldots|\,(\sum_{j=1}^{n}A_j(z_{mj})))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\mathrm{mod}(A)=\bigcup_{k=1}^{m}\mathrm{mod}(\sum_{j=1}^{n}A_j(z_{kj}))\ (3).$$

Αλλά, για κάθε k∈{1,2,…,m}, $\sum_{j=1}^{n}A_j(z_{kj})\in C^{1\times n}$, επομένως:

$\mathrm{mod}(\sum_{j=1}^{n}A_j(z_{kj}))=\bigcap_{j=1}^{n}\mathrm{mod}(A_j(z_{kj}))$, άρα από την (3) προκύπτει:

$\mathrm{mod}(A)=\bigcup_{k=1}^{m}\bigcap_{j=1}^{n}\mathrm{mod}(A_j(z_{kj}))$, και η απόδειξη είναι πλήρης.

Πρόταση 4.6

Έστω $(\mathbb{C}^{*\times n},\vee,\wedge,\neg)$ ένας λογικά πλήρης χώρος διαστάσεως n και $L=\{T,F,(,),\vee,\wedge,\neg,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ μια γλώσσα με n άτομα. Τότε:

- Για κάθε πρόταση $p\in L^*$ ισχύει: mod(p)=mod(TT(p)).
- Για κάθε πίνακα $P\in\mathbb{C}^{*\times n}$ ισχύει: mod(P)=mod(TTI(P)).

Απόδειξη

Έστω $p \in L^*$.

- Αν p=T τότε mod(p)=I(n) και mod(TT(p))=mod(T_n)=I(n)=mod(p).
- Αν p=F τότε mod(p)=∅ και mod(TT(p))=mod(F_n)=∅=mod(p).
- Αν $p=\alpha_j$ για κάποιο $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, τότε mod(p)=$\{I=(i_1,i_2,\ldots,i_n) \in I(n)$: $i_k \in \{0,1\}$ για $k \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{j\}$ και $i_j=1\} = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$, όπου $I_k=\{0,1\}$ για $k \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{j\}$ και $I_j=\{1\}$. Από το πόρισμα 4.4, mod(TT(p))=mod(A_j)=$J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_n$, όπου $J_k=\{0,1\}$ $k \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{j\}$, $J_j=\{1\}$. Συνεπώς, $I_j=J_j$, για όλα τα $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, άρα mod(p)=mod(TT(p)).
- Εν γένει, αν $p \in L^*$, τότε είναι γνωστό ότι η p εκφράζεται σαν μία πεπερασμένη ακολουθία ατόμων και σταθερών, διαχωριζομένων από τελεστές ($\vee, \wedge, \neg$).

  Για κάθε $q,r \in L^*$, ισχύει η ισότητα $mod(q \vee r)=mod(q) \cup mod(r)$ και $mod(TT(q \vee r))=mod(TT(q) \vee TT(r))=mod(TT(q)) \cup mod(TT(r))$.

  Ομοίως, για κάθε $q,r \in L^*$, ισχύει η ισότητα $mod(q \wedge r)=mod(q) \cap mod(r)$ και $mod(TT(q \wedge r))=mod(TT(q) \wedge TT(r))=mod(TT(q)) \cap mod(TT(r))$.

  Επιπλέον, για κάθε $q \in L^*$, ισχύει η ισότητα $mod(\neg q)=I(n) \setminus mod(q)$ και $mod(TT(\neg q))=mod(\neg TT(q))=I(n) \setminus mod(TT(q))$.

  Η αρχική πρόταση p μπορεί να χωριστεί σε απλούστερες εκφράσεις (άτομα, σταθερές και τελεστές) σε πεπερασμένο πλήθος βημάτων συνεπώς το σύνολο mod(p) μπορεί να εκφραστεί χρησιμοποιώντας τα σύνολα $mod(\alpha_j)$, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, I(n), ∅ και τους τελεστές της ένωσης (∪), τομής (∩) και αφαίρεσης (\). Επιπλέον, δείξαμε ήδη ότι $mod(\alpha_j)=mod(TT(\alpha_j))$ για κάθε $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, mod(T)=mod(TT(T)) και mod(F)=mod(TT(F)). Αυτό αναδρομικά αποδεικνύει ότι mod(p)=mod(TT(p)).

Τώρα, έστω $P \in \mathbb{C}^{*\times n}$ και έστω ότι η ENF έκφραση του P είναι:

$$P = (\sum_{j=1}^{n} A_j(z_{1j})) \,|\, (\sum_{j=1}^{n} A_j(z_{2j})) \,|\, \ldots \,|\, (\sum_{j=1}^{n} A_j(z_{mj})).$$

Τότε, εξ ορισμού:

$$\mathrm{mod}(TTI(P)) = \mathrm{mod}(\bigvee_{k=1}^{m}(\bigwedge_{j=1}^{n} TTI(A_j(z_{kj})))) = \bigcup_{k=1}^{m}\bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{mod}(TTI(A_j(z_{kj})) \quad (1).$$

Έστω $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, $z \in \mathbb{C}$. Τότε:

- Αν $z \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathbb{C}_-$, $TTI(A_j(z))=\alpha_j \Rightarrow mod(TTI(A_j(z)))=mod(\alpha_j)=\{I=(i_1,i_2,\ldots,i_n) \in I(n)$: $i_k \in \{0,1\}$, $k \in \{1,2,\ldots,n\}/\{j\}$ και $i_j=1\}=I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$, όπου $I_k=\{0,1\}$, για $k \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{j\}$ και $I_j=\{1\}$. Από το πόρισμα 4.4, έχουμε ότι $mod(A_j(z))=J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_n$, όπου $J_k=\{0,1\}$, για $k \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{j\}$ και $J_j=\{1\}$, αφού $z \in \mathbb{C}_+ \setminus \mathbb{C}_-$. Συνεπώς $I_j=J_j$ για κάθε $j \in \{1,2,\ldots,n\} \Rightarrow mod(TTI(A_j(z)))=mod(A_j(z))$.

- Αν $z\in\mathbb{C}_-\backslash\mathbb{C}_+$, $TTI(A_j(z))=\neg\alpha_j\Rightarrow mod(TTI(A_j(z)))=mod(\neg\alpha_j)=\{I=(i_1,i_2,\ldots,i_n)\in I(n): i_k\in\{0,1\},\ k\in\{1,2,\ldots,n\}/\{j\}$ και $i_j=0\}=I_1\times I_2\times\ldots\times I_n$, όπου $I_k=\{0,1\}$, για $k\in\{1,2,\ldots,n\}\backslash\{j\}$ και $I_j=\{0\}$. Από το πόρισμα 4.4, έχουμε ότι $mod(A_j(z))=J_1\times J_2\times\ldots\times J_n$, όπου $J_k=\{0,1\}$, για $k\in\{1,2,\ldots,n\}\backslash\{j\}$ και $J_j=\{0\}$, αφού $z\in\mathbb{C}_-\backslash\mathbb{C}_+$. Συνεπώς $I_j=J_j$ για όλα τα $j\in\{1,2,\ldots,n\}\Rightarrow mod(TTI(A_j(z)))=mod(A_j(z))$.
- Αν $z\in\mathbb{C}_0$, $TTI(A_j(z))=T\Rightarrow mod(TTI(A_j(z)))=mod(T)=I(n)$. Επιπλέον ισχύει ότι $A_j(z)=A_j(0)=T_n$, άρα $mod(A_j(z))=mod(T_n)=I(n)=mod(TTI(A_j(z)))$.
- Τέλος, αν $z\in\mathbb{C}_*$, $TTI(A_j(z))=F\Rightarrow mod(TTI(A_j(z)))=mod(F)=\varnothing$. Επιπλέον, ο πίνακας $A_j(z)$ θα έχει τουλάχιστον ένα αντιφατικό στοιχείο, αυτό που βρίσκεται στην στήλη j, του οποίου η τιμή είναι $z\in\mathbb{C}_*$. Συνεπώς ισχύει ότι: $mod(A_j(z))=\varnothing=mod(TTI(A_j(z)))$.

Συνεπώς, για όλα τα $z\in\mathbb{C}$ και όλα τα $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ ισχύει ότι: $mod(TTI(A_j(z)))=mod(A_j(z))$.

Συνεπώς: $(1)\Rightarrow \mathrm{mod}(TTI(P))=\bigcup_{k=1}^{m}\bigcap_{j=1}^{n}\mathrm{mod}(A_j(z_{kj}))$.

Συνδυάζοντας την παραπάνω εξίσωση με την πρόταση 4.5 παίρνουμε:

$\mathrm{mod}(TTI(P))=\bigcup_{k=1}^{m}\bigcap_{j=1}^{n}\mathrm{mod}(A_j(z_{kj}))=\mathrm{mod}(P)$, και η απόδειξη είναι πλήρης.

A.2 Πράξεις Μεταξύ Πινάκων

Στην παρούσα ενότητα θα ορίσουμε κάποιους τελεστές διάζευξης, σύζευξης και άρνησης και θα αποδείξουμε ότι ανήκουν στις σχετικές κλάσεις ($\mathcal{F}_\vee$, $\mathcal{F}_\wedge$, $\mathcal{F}_\neg$). Επίσης, θα αποδείξουμε κάποιες ενδιαφέρουσες συνέπειες των ορισμών των τελεστών αυτών.

Πρόταση Α.1

Έστω $A, B\in\mathbb{C}^{*\times n}$. Ορίζουμε τον τελεστή $\vee$ ως εξής: $A\vee B=A|B$. Τότε $\vee\in\mathcal{F}_\vee$.

Απόδειξη

Από τον ορισμό ικανοποιησιμότητας (ορισμός 4.6) έπεται προφανώς ότι για τυχαίους πίνακες $A, B\in\mathbb{C}^{*\times n}$ ισχύει: $mod(A|B)=mod(A)\cup mod(B)$, επομένως $\vee\in\mathcal{F}_\vee$.

Ο παραπάνω τελεστής διάζευξης προκύπτει με εντελώς φυσικό τρόπο από τον ορισμό ικανοποιησιμότητας. Για τον λόγο αυτό του δίνουμε ειδικό όνομα:

Ορισμός Α.1

Ο τελεστής διάζευξης όπως ορίστηκε στην πρόταση Α.1 ονομάζεται *κανονική διάζευξη* (*normal disjunction*).

Για την σύζευξη έχουμε το εξής ενδιαφέρον αποτέλεσμα:

Πρόταση Α.2

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ με τις ιδιότητες:

- $f(z,w)\in\mathbb{C}_+$ ανν $z\in\mathbb{C}_+$ και $w\in\mathbb{C}_+$
- $f(z,w)\in\mathbb{C}_-$ ανν $z\in\mathbb{C}_-$ και $w\in\mathbb{C}_-$

Έστω μία συνάρτηση $F:\mathbb{C}^{1\times n}\times\mathbb{C}^{1\times n}\to\mathbb{C}^{1\times n}$, η οποία για δύο πίνακες:

$A^*=[\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_n]\in\mathbb{C}^{1\times n}$, $B^*=[b_1\ b_2\ \dots\ b_n]\in\mathbb{C}^{1\times n}$ ορίζεται ως εξής:

$F(A^*,B^*)=[f(\alpha_1,b_1)\ \ f(\alpha_2,b_2)\ \ \dots\ \ f(\alpha_n,b_n)]$.

Τέλος, ορίζουμε τον τελεστή $\wedge$, ο οποίος για κάποια $k, m\in\mathbb{N}^*$ και δύο πίνακες $A\in\mathbb{C}^{k\times n}$, $B\in\mathbb{C}^{m\times n}$, για τους οποίους ισχύει ότι $A=A^{(1)}|A^{(2)}|\dots|A^{(k)}$, $B=B^{(1)}|B^{(2)}|\dots|B^{(m)}$, όπου $A^{(j)}\in\mathbb{C}^{1\times n}$, $j=1,2,\dots,k$, $B^{(j)}\in\mathbb{C}^{1\times n}$, $j=1,2,\dots,m$ ορίζεται ως εξής:

$$A\wedge B=\mathop{|}_{j=1}^{k}\mathop{|}_{h=1}^{m}F(A^{(j)},B^{(h)}).$$

Τότε $\wedge\in\mathcal{F}_\wedge$.

Απόδειξη

Έστω $C=A\wedge B$. Αρκεί να δείξω ότι $mod(C)=mod(A)\cap mod(B)$.

Καταρχήν υποθέτουμε ότι $k=m=1\in\mathbb{N}^*$. Τότε $A, B\in\mathbb{C}^{1\times n}$, και έστω $A=[\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_n]$, $B=[b_1\ b_2\ \dots\ b_n]$. Το αποτέλεσμα $C=A\wedge B\in\mathbb{C}^{1\times n}$, και έστω $C=[c_1\ c_2\ \dots\ c_n]$.

Τότε έχουμε:

$$C=A\wedge B=\mathop{|}_{j=1}^{1}\mathop{|}_{h=1}^{1}F(A^{(j)},B^{(h)})=F(A,B)=\left[f(a_1,b_1)\quad f(a_2,b_2)\quad \dots\quad f(a_n,b_n)\right]$$

Από την πρόταση 4.4 έχουμε ότι:

$mod(A)=I_{A1}\times I_{A2}\times\dots\times I_{An}$,

$mod(B)=I_{B1}\times I_{B2}\times\dots\times I_{Bn}$,

όπου για κάθε $j\in\{1,2,\dots,n\}$ ισχύει:

- $0\in I_{Aj}$ ανν $\alpha_j\in\mathbb{C}_-$
- $1\in I_{Aj}$ ανν $\alpha_j\in\mathbb{C}_+$
- $0\in I_{Bj}$ ανν $b_j\in\mathbb{C}_-$
- $1\in I_{Bj}$ ανν $b_j\in\mathbb{C}_+$

Ομοίως για τον πίνακα C από την πρόταση 4.4 έχουμε ότι:
$\mathrm{mod}(C)=I_{C1}\times I_{C2}\times\ldots\times I_{Cn}$,
όπου για κάθε $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ ισχύει:

- $0\in I_{Cj}$ ανν $c_j\in\mathbb{C}_-\Leftrightarrow f(\alpha_j,b_j)\in\mathbb{C}_-\Leftrightarrow\alpha_j\in\mathbb{C}_-$ και $b_j\in\mathbb{C}_-\Leftrightarrow 0\in I_{Aj}$ και $0\in I_{Bj}$
- $1\in I_{Cj}$ ανν $c_j\in\mathbb{C}_+\Leftrightarrow f(\alpha_j,b_j)\in\mathbb{C}_+\Leftrightarrow\alpha_j\in\mathbb{C}_+$ και $b_j\in\mathbb{C}_+\Leftrightarrow 1\in I_{Aj}$ και $1\in I_{Bj}$

Οι δύο αυτές παρατηρήσεις σε συνδυασμό με το γεγονός ότι για κάθε $j\in\{1,2,\ldots n\}$ ισχύει ότι $I_{Aj}\subseteq\{0,1\}$, $I_{Bj}\subseteq\{0,1\}$, $I_{Cj}\subseteq\{0,1\}$, δίνουν ότι για κάθε $j\in\{1,2,\ldots n\}$ ισχύει: $I_{Cj}=I_{Aj}\cap I_{Bj}$.
Έτσι τελικά έχουμε:
$\mathrm{mod}(A)\cap\mathrm{mod}(B)=(I_{A1}\times I_{A2}\times\ldots\times I_{An})\cap(I_{B1}\times I_{B2}\times\ldots\times I_{Bn})=$
$=(I_{A1}\cap I_{B1})\times(I_{A2}\cap I_{B2})\times\ldots\times(I_{An}\cap I_{Bn})=I_{C1}\times I_{C2}\times\ldots\times I_{Cn}=\mathrm{mod}(C)$, δηλαδή η πρόταση ισχύει για πίνακες-γραμμή.

Για την γενική περίπτωση, όπου $k\in\mathbb{N}^*$, $m\in\mathbb{N}^*$, έχουμε:

$$\mathrm{mod}(C)=\mathrm{mod}(A\wedge B)=\mathrm{mod}(\mathop{|}_{j=1}^{k}\mathop{|}_{h=1}^{m}F(A^{(j)},B^{(h)}))=\bigcup_{j=1}^{k}\bigcup_{h=1}^{m}\mathrm{mod}(F(A^{(j)},B^{(h)}))\ (1).$$

Εξ ορισμού, για κάθε $j\in\{1,2,\ldots,k\}$ και $h\in\{1,2,\ldots,m\}$ ισχύει ότι:
$F(A^{(j)},B^{(h)})=A^{(j)}\wedge B^{(h)}$, αφού $A^{(j)}$, $B^{(h)}\in\mathbb{C}^{1\times n}$, οπότε από την ειδική περίπτωση παραπάνω, προκύπτει ότι:
$\mathrm{mod}(F(A^{(j)},B^{(h)})=\mathrm{mod}(A^{(j)})\cap\mathrm{mod}(B^{(h)})$. Άρα:

$$(1)\Rightarrow\mathrm{mod}(C)=\bigcup_{j=1}^{k}\bigcup_{h=1}^{m}(\mathrm{mod}(A^{(j)})\cap\mathrm{mod}(B^{(h)}))=(\bigcup_{j=1}^{k}\mathrm{mod}(A^{(j)}))\cap(\bigcup_{h=1}^{m}\mathrm{mod}(B^{(h)}))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\mathrm{mod}(C)=\mathrm{mod}(A)\cap\mathrm{mod}(B)$$

Η απόδειξη είναι πλήρης.

Η παραπάνω πρόταση μας δίνει μία ολόκληρη κλάση συναρτήσεων σύζευξης και ανάγει το πρόβλημα της εύρεσης μίας τέτοιας συνάρτησης στην εύρεση της πολύ απλούστερης συνάρτησης f. Παρατηρήστε ακόμα ότι μία προφανής συνέπεια των ιδιοτήτων της f είναι ότι $f(z,w)\in\mathbb{C}_*$ αν τα z,w δεν είναι και τα δύο θετικά ή και τα δύο αρνητικά. Δηλαδή ισχύει ότι $f(z,w)\in\mathbb{C}_*$ αν και μόνο αν $z\in\mathbb{C}_*$, ή $w\in\mathbb{C}_*$, ή $z\in\mathbb{C}_-\backslash\mathbb{C}_+$ και $w\in\mathbb{C}_+\backslash\mathbb{C}_-$, ή $z\in\mathbb{C}_+\backslash\mathbb{C}_-$ και $w\in\mathbb{C}_-\backslash\mathbb{C}_+$. Στα παρακάτω λήμματα θα προτείνουμε κάποιες συναρτήσεις με αυτές τις ιδιότητες, οπότε είναι προφανής η επέκταση τους σε αντίστοιχες πράξεις σύζευξης ($\wedge$) με την βοήθεια της πρότασης Α.2:

Λήμμα Α.1

Έστω θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $\lambda_3>0$, $\lambda_4>0$, και συνάρτηση $f:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ οριζόμενη ως εξής:

- $f(z,w)=\lambda_1$ ανν $z\in\mathbb{C}_+$, $w\in\mathbb{C}_+$ και $z+w\neq 0$
- $f(z,w)=\lambda_2 i$ ανν $z\in\mathbb{C}_-$, $w\in\mathbb{C}_-$ και $z+w\neq 0$
- $f(z,w)=0$ ανν $z,w\in\mathbb{C}_0$
- $f(z,w)=\lambda_3+\lambda_4 i$, σε κάθε άλλη περίπτωση.

Τότε η f έχει τις ιδιότητες:

- $f(z,w)\in\mathbb{C}_+$ ανν $z\in\mathbb{C}_+$ και $w\in\mathbb{C}_+$
- $f(z,w)\in\mathbb{C}_-$ ανν $z\in\mathbb{C}_-$ και $w\in\mathbb{C}_-$

Απόδειξη

Έστω ότι $z\in\mathbb{C}_+$ και $w\in\mathbb{C}_+$ και $z+w\neq 0$. Τότε $f(z,w)=\lambda_1\in\mathbb{C}_+$.

Έστω ότι $z\in\mathbb{C}_+$ και $w\in\mathbb{C}_+$ και $z+w=0$. Τότε $Re(z)\geq 0$, $Re(w)\geq 0$ και $Re(z+w)=0$, άρα $Re(z)=Re(w)=0$. Με όμοιο τρόπο προκύπτει ότι $Im(z)=Im(w)=0$, άρα:

$z=w=0\in\mathbb{C}_+\cap\mathbb{C}_0$. Οπότε $z,w\in\mathbb{C}_0\Rightarrow f(z,w)=0\in\mathbb{C}_+$.

Άρα $z,w\in\mathbb{C}_+\Rightarrow f(z,w)\in\mathbb{C}_+$.

Αντίστροφα, έστω ότι $f(z,w)\in\mathbb{C}_+$. Από τον ορισμό της f είναι προφανές ότι:

$f(z,w)\in\mathbb{C}_+\Rightarrow f(z,w)=0$ ή $f(z,w)=\lambda_1$.

Αν $f(z,w)=0$ τότε $z,w\in\mathbb{C}_0\subset\mathbb{C}_+$.

Αν $f(z,w)=\lambda_1$ τότε $z,w\in\mathbb{C}_+$.

Σε κάθε περίπτωση δηλαδή, $f(z,w)\in\mathbb{C}_+\Rightarrow z,w\in\mathbb{C}_+$.

Τελικά δηλαδή $f(z,w)\in\mathbb{C}_+\Leftrightarrow z,w\in\mathbb{C}_+$.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $f(z,w)\in\mathbb{C}_-\Leftrightarrow z,w\in\mathbb{C}_-$.

Η απόδειξη είναι πλήρης.

Η παραπάνω κλάση συναρτήσεων δίνει ένα «μονολιθικό» τρόπο ορισμού της σύζευξης, αφού δίνει πολύ συγκεκριμένα αποτελέσματα, συναρτήσει του υποσυνόλου του $\mathbb{C}$ στο οποίο βρίσκονται οι αριθμοί z,w. Η παρακάτω συνάρτηση είναι πιο χρήσιμη γιατί δίνει αποτελέσματα πιο κοντά στην διαισθητική σημασία του δείκτη αξιοπιστίας και της πράξης της σύζευξης:

Λήμμα Α.2

Έστω θετικός πραγματικός $\varepsilon>0$ και $z=x_1+y_1 i\in\mathbb{C}$, $w=x_2+y_2 i\in\mathbb{C}$. Για τους μιγαδικούς z,w και την παράμετρο ε, ορίζουμε την συνάρτηση $f:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ ως εξής:

- Αν $z\in\mathbb{C}_0$ ή $w\in\mathbb{C}_0$, τότε $f(z,w)=z+w$,
- Αν $z,w\in\mathbb{C}_+\setminus\mathbb{C}_0$ ή $z,w\in\mathbb{C}_-\setminus\mathbb{C}_0$, τότε $f(z,w)=z+w$,

- Αν $z\in\mathbb{C}_*$ ή $w\in\mathbb{C}_*$ τότε $f(z,w)=(|x_1|+|x_2|)+(|y_1|+|y_2|)i$,
- Αν $z\in\mathbb{C}_+\setminus\mathbb{C}_0$, $w\in\mathbb{C}_-\setminus\mathbb{C}_0$ ή $z\in\mathbb{C}_-\setminus\mathbb{C}_0$, $w\in\mathbb{C}_+\setminus\mathbb{C}_0$ διακρίνουμε τρεις υποπεριπτώσεις:
    - Αν $x_1=x_2=0$ τότε $f(z,w)=\varepsilon+(|y_1|+|y_2|)i$
    - Αν $y_1=y_2=0$ τότε $f(z,w)=(|x_1|+|x_2|)+\varepsilon i$
    - Σε κάθε άλλη περίπτωση: $f(z,w)=(|x_1|+|x_2|)+(|y_1|+|y_2|)i$

Τότε η f έχει τις ιδιότητες:

- $f(z,w)\in\mathbb{C}_+$ ανν $z\in\mathbb{C}_+$ και $w\in\mathbb{C}_+$
- $f(z,w)\in\mathbb{C}_-$ ανν $z\in\mathbb{C}_-$ και $w\in\mathbb{C}_-$

Απόδειξη

Έστω $z,w\in\mathbb{C}_+$.

Αν ένας από τους $z,w\in\mathbb{C}_0$, τότε $f(z,w)=z+w$.

Αν ισχύει ότι $z,w\in\mathbb{C}_+\setminus\mathbb{C}_0$, τότε $f(z,w)=z+w$.

Δηλαδή, σε κάθε περίπτωση: $f(z,w)=z+w$.

Αφού $z,w\in\mathbb{C}_+\Rightarrow Re(z)\geq 0$, $Re(w)\geq 0\Rightarrow Re(z+w)\geq 0\Rightarrow Re(f(z,w))\geq 0$.

Ομοίως, αφού $z,w\in\mathbb{C}_+\Rightarrow Im(z)\leq 0$, $Im(w)\leq 0\Rightarrow Im(z+w)\leq 0\Rightarrow Im(f(z,w))\leq 0$.

Άρα $f(z,w)\in\mathbb{C}_+$, δηλαδή $z,w\in\mathbb{C}_+\Rightarrow f(z,w)\in\mathbb{C}_+$.

Αντίστροφα, έστω ότι $v=f(z,w)\in\mathbb{C}_+$.

Αυτό σημαίνει ότι $Re(v)\geq 0$, $Im(v)\leq 0$.

Αν $z\in\mathbb{C}_*$, τότε $v=f(z,w)=(|x_1|+|x_2|)+(|y_1|+|y_2|)i$, άρα $Re(v)\geq 0$, $Im(v)\geq 0$.

Συνδυάζοντας με τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι:

$Im(v)=0\Rightarrow|y_1|+|y_2|=0\Rightarrow y_1=y_2=0\Rightarrow Im(z)=0\Rightarrow z\notin\mathbb{C}_*$, άτοπο.

Ομοίως αν $w\in\mathbb{C}_*$ καταλήγουμε σε άτοπο.

Άρα, $z,w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{C}_*=\mathbb{C}_+\cup\mathbb{C}_-$.

Έστω ότι $z\in\mathbb{C}_-\setminus\mathbb{C}_+=\mathbb{C}_-\setminus\mathbb{C}_0$. Τότε διακρίνουμε τρεις υποπεριπτώσεις:

- Αν $w\in\mathbb{C}_-\setminus\mathbb{C}_+=\mathbb{C}_-\setminus\mathbb{C}_0$, τότε $f(z,w)=z+w$, και αφού $Re(z)\leq 0$, $Re(w)\leq 0$, $Im(z)\geq 0$, $Im(w)\geq 0$:
  $0\leq Re(v)=Re(z+w)=Re(z)+Re(w)\leq 0+0=0\Rightarrow Re(v)=0$
  $0\geq Im(v)=Im(z+w)=Im(z)+Im(w)\geq 0+0=0\Rightarrow Im(v)=0$
  Άρα $v=0\Rightarrow z+w=0$.
  Επειδή όμως $Re(z)\leq 0$, $Re(w)\leq 0$ και $Re(z+w)=0$ έχουμε ότι $Re(z)=Re(w)=0$.
  Ομοίως: $Im(z)=Im(w)=0$, άρα $z=w=0$, άτοπο γιατί $z\notin\mathbb{C}_0$.
- Αν $w\in\mathbb{C}_0$, τότε $w=0$, και $v=f(z,w)=z+w=z\in\mathbb{C}_-\setminus\mathbb{C}_+$, άτοπο, αφού $v\in\mathbb{C}_+$.

- Τέλος, αν $w\in\mathbb{C}_+\backslash\mathbb{C}_-=\mathbb{C}_+\backslash\mathbb{C}_0$, τότε:
    - Αν $x_1=x_2=0\Rightarrow Im(v)=|y_1|+|y_2|$. Επειδή $x_1=0$ και $z\notin\mathbb{C}_0$ έπεται ότι $y_1\neq0\Rightarrow|y_1|+|y_2|>0\Rightarrow Im(v)>0$. Επομένως $v\notin\mathbb{C}_+$, άτοπο.
    - Αν $y_1=y_2=0\Rightarrow Im(v)=\varepsilon>0$. Επομένως $v\notin\mathbb{C}_+$, άτοπο.
    - Σε κάθε άλλη περίπτωση, $Im(v)=|y_1|+|y_2|\geq0$. Αν $Im(v)=0$, τότε $y_1=y_2=0$, άτοπο, γιατί θα είχαμε την παραπάνω περίπτωση, άρα ισχύει: $Im(v)>0$. Επομένως $v\notin\mathbb{C}_+$, άτοπο.

Σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε σε άτοπο, άρα είμαστε υποχρεωμένοι να δεχτούμε ότι $z\in\mathbb{C}_+$. Με όμοια συλλογιστική αποδεικνύουμε ότι $w\in\mathbb{C}_+$. Δείξαμε δηλαδή ότι:

$f(z,w)\in\mathbb{C}_+\Rightarrow z,w\in\mathbb{C}_+$, η οποία σε συνδυασμό με την $z,w\in\mathbb{C}_+\Rightarrow f(z,w)\in\mathbb{C}_+$, δίνει:

$z,w\in\mathbb{C}_+\Leftrightarrow f(z,w)\in\mathbb{C}_+$.

Με εντελώς ανάλογο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι $z,w\in\mathbb{C}_-\Leftrightarrow f(z,w)\in\mathbb{C}_-$, οπότε η απόδειξη είναι πλήρης.

Η παραπάνω συνάρτηση είναι αρκετά περίπλοκη, λόγω των πολλών ειδικών περιπτώσεων που έχει. Ορίστηκε με τον τρόπο αυτό για λόγους πληρότητας. Στην πράξη θα την χρησιμοποιήσουμε κυρίως για αριθμούς $z,w\in\mathbb{C}^{(+)}$. Για τέτοιους αριθμούς η μορφή της είναι πολύ απλούστερη και δίνεται από το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα Α.3

Για κάθε $z,w\in\mathbb{C}^{(+)}$ και $\varepsilon>0$, ισχύει ότι $f(z,w)=z+w$, όπου η f είναι όπως ορίζεται στο λήμμα Α.2.

Απόδειξη

Έστω ότι $z=x_1+y_1i$, $w=x_2+y_2i$.

Προφανώς ισχύει ότι $x_1=Re(z)\geq0$, $y_1=Im(z)\geq0$, $x_2=Re(w)\geq0$, $y_2=Im(w)\geq0$.

Έστω ότι $z\in\mathbb{C}_*$. Τότε:

$f(z,w)=(|x_1|+|x_2|)+(|y_1|+|y_2|)i=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i=z+w$.

Ομοίως αν $w\in\mathbb{C}_*\Rightarrow f(z,w)=z+w$.

Αν $z\in\mathbb{C}_0$ ή $w\in\mathbb{C}_0$, τότε $f(z,w)=z+w$ εξ ορισμού.

Άρα αν $z\in\mathbb{C}_*\cup\mathbb{C}_0$ ή $w\in\mathbb{C}_*\cup\mathbb{C}_0$ τότε $f(z,w)=z+w$.

Μένει να εξετάσουμε τις περιπτώσεις όπου $z\in(\mathbb{C}_+\cup\mathbb{C}_-)\backslash\mathbb{C}_0$ και $w\in(\mathbb{C}_+\cup\mathbb{C}_-)\backslash\mathbb{C}_0$

Αν $z\in\mathbb{C}_+\backslash\mathbb{C}_0$, $w\in\mathbb{C}_+\backslash\mathbb{C}_0$, τότε $f(z,w)=z+w$ εξ ορισμού.

Αν $z\in\mathbb{C}_-\backslash\mathbb{C}_0$, $w\in\mathbb{C}_-\backslash\mathbb{C}_0$, τότε $f(z,w)=z+w$ εξ ορισμού.

Αν $z\in\mathbb{C}_+\backslash\mathbb{C}_0$, $w\in\mathbb{C}_-\backslash\mathbb{C}_0$, τότε αφού $z,w\in\mathbb{C}^{(+)}$ έπεται ότι:
$Re(z)>0$, $Im(z)=0$, $Re(w)=0$, $Im(w)>0$, επομένως:
$f(z,w)=(|x_1|+|x_2|)+(|y_1|+|y_2|)i=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i=z+w$.

Με όμοια συλλογιστική, αν $z\in\mathbb{C}_-\backslash\mathbb{C}_0$, $w\in\mathbb{C}_+\backslash\mathbb{C}_0$, παίρνουμε $f(z,w)=z+w$.
Έχουμε εξαντλήσει όλες τις πιθανές περιπτώσεις και σε όλες πήραμε σαν αποτέλεσμα ότι $f(z,w)=z+w$, άρα η απόδειξη είναι πλήρης.

Ορισμός Α.2
Έστω η συνάρτηση f όπως ορίστηκε στο λήμμα Α.2 για ε=1. Την πράξη σύζευξης που προκύπτει χρησιμοποιώντας την τεχνική της πρότασης Α.2 από την f θα την ονομάζουμε *κανονική σύζευξη* (*normal conjunction*).

Η απόδειξη της παρακάτω πρότασης είναι άμεση:
Πρόταση Α.3
Η πράξη της κανονικής σύζευξης ($\wedge$) ανήκει στην κλάση $\mathcal{F}_\wedge$ ($\wedge\in\mathcal{F}_\wedge$). Επίσης, για τυχαίους πίνακες A, $B\in\mathbb{C}^{(+)*\times n}$ ισχύει ότι $A\wedge B=A\bullet B$, όπου $\bullet$ η γνωστή πράξη της ενημέρωσης (ορισμός 5.1).
Απόδειξη
Το ότι $\wedge\in\mathcal{F}_\wedge$ προκύπτει άμεσα από την πρόταση Α.2 και το λήμμα Α.2.
Η ισότητα $A\wedge B=A\bullet B$ προκύπτει από τον ορισμό 5.1, την πρόταση Α.2 και το λήμμα Α.3, δεδομένου ότι A, $B\in\mathbb{C}^{(+)*\times n}$.

Με την βοήθεια των πράξεων της σύζευξης και διάζευξης μπορούμε να ορίσουμε και μία πράξη άρνησης:
Πρόταση Α.4
Έστω $A\in\mathbb{C}^{*\times n}$. Ορίζουμε τον τελεστή $\neg$ αναδρομικά ως εξής:

- Αν $A=A_j(z)$ για κάποιο $j\in\{1,2,\ldots,n\}$, $z\in(\mathbb{C}_+\cup\mathbb{C}_-)\backslash\mathbb{C}_0$, τότε $\neg A=A_j(\bar{z}\cdot i)$.
- Αν $A=A_j(z)$ για κάποιο $j\in\{1,2,\ldots,n\}$, $z\in\mathbb{C}_0$, τότε $\neg A=F_n$.
- Αν $A=A_j(z)$ για κάποιο $j\in\{1,2,\ldots,n\}$, $z\in\mathbb{C}_*$, τότε $\neg A=A_j(Re(z)\cdot i)\vee A_j(Im(z))$.
- Στην γενική περίπτωση, αν $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, για κάποιο $m\in\mathbb{N}^*$ και:
  $A=(\sum_{j=1}^{n}A_j(z_{1j}))\,|\,(\sum_{j=1}^{n}A_j(z_{2j}))\,|\ldots|\,(\sum_{j=1}^{n}A_j(z_{mj}))$ η ENF μορφή του πίνακα. Τότε:

$\neg A = \underset{h=1}{\overset{m}{\wedge}} \underset{j=1}{\overset{n}{\vee}} (\neg A_j(z_{hj}))$, όπου οι πράξεις $\vee$, $\wedge$ είναι οποιεσδήποτε πράξεις διάζευξης και σύζευξης αντίστοιχα ($\vee \in \mathcal{F}_{\vee}$, $\wedge \in \mathcal{F}_{\wedge}$).

Τότε, για τον τελεστή $\neg$ όπως ορίστηκε παραπάνω ισχύει: $\neg \in \mathcal{F}_{\neg}$.

Απόδειξη

Αν $A=A_j(z)$ για κάποιο $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ και κάποιο $z \in \mathbb{C}$, τότε υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

- Αν $z \in \mathbb{C}_+ \backslash \mathbb{C}_0$, τότε από το πόρισμα 4.4:
  $mod(A)=I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$, όπου $I_k=\{0,1\}$, $k \in \{1,2,\ldots,n\} \backslash \{j\}$ και $I_j=\{1\}$.
  Όμως αφού $z \in \mathbb{C}_+ \backslash \mathbb{C}_0 \Rightarrow Re(z) \geq 0$, $Im(z) \leq 0$ και $z \neq 0$. Εύκολα επαληθεύεται ότι για τον μιγαδικό αριθμό $w = \bar{z} \cdot i$, ισχύει ότι $Re(w)=Im(z) \leq 0$, $Im(w)=Re(z) \geq 0$, και $w \neq 0$, άρα $w \in \mathbb{C}_- \backslash \mathbb{C}_0$. Συνεπώς από το πόρισμα 4.4:
  $mod(\neg A)=mod(A_j(w))=I^{(1)} \times I^{(2)} \times \ldots \times I^{(n)}$, όπου $I^{(k)}=\{0,1\}$, $k \in \{1,2,\ldots,n\} \backslash \{j\}$ και $I^{(j)}=\{0\}$. Είναι σαφές επομένως ότι: $mod(\neg A)=I(n) \backslash mod(A)$.
- Με όμοιο συλλογισμό, αν $z \in \mathbb{C}_+ \backslash \mathbb{C}_0$, προκύπτει ότι $mod(\neg A)=I(n) \backslash mod(A)$.
- Αν $z \in \mathbb{C}_0$, τότε $z=0 \Rightarrow A_j(z)=T_n \Rightarrow mod(A)=mod(T_n)=I(n)$. Από την άλλη μεριά:
  $mod(\neg A)=mod(F_n)=\varnothing \Rightarrow mod(\neg A)=I(n) \backslash mod(A)$.
- Τέλος, αν $z \in \mathbb{C}_*$, τότε από το πόρισμα 4.4:
  $mod(A)=mod(A_j(z))=\varnothing$.
  Έστω $Re(z)>0$. Τότε $Im(z)>0$ οπότε έχουμε:
  $Re(z) \cdot i \in \mathbb{C}_- \backslash \mathbb{C}_0$ και $Im(z) \in \mathbb{C}_+ \backslash \mathbb{C}_0$. Συνεπώς:
  $mod(A_j(Re(z) \cdot i))=I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ και $mod(A_j(Im(z)))=I^{(1)} \times I^{(2)} \times \ldots \times I^{(n)}$, όπου:
  - $I_h=I^{(h)}=\{0,1\}$ για $h \in \{1,2,\ldots,n\} \backslash \{j\}$
  - $I_j=\{0\}$
  - $I^{(j)}=\{1\}$

  Συνεπώς:
  $mod(\neg A)=mod(A_j(Re(z) \cdot i) \vee A_j(Im(z)))=mod(A_j(Re(z) \cdot i)) \cup mod(A_j(Im(z)))=I(n) \Rightarrow$
  $\Rightarrow mod(\neg A)=I(n) \backslash mod(A)$.
  Ομοίως, αν $Re(z)<0$ έπεται $Im(z)<0$ και με όμοιο συλλογισμό προκύπτει: $mod(\neg A)=I(n) \backslash mod(A)$.

Στην γενική περίπτωση ισχύει:

$$mod(\neg A) = mod(\underset{h=1}{\overset{m}{\wedge}} \underset{j=1}{\overset{n}{\vee}} (\neg A_j(z_{hj}))) = \underset{h=1}{\overset{m}{\cap}} \underset{j=1}{\overset{n}{\cup}} mod(\neg A_j(z_{hj})) =$$

$= \bigcap_{h=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} (I(n) \setminus \mathrm{mod}(A_j(z_{hj}))) = I(n) \setminus \bigcup_{h=1}^{m} \bigcap_{j=1}^{n} \mathrm{mod}(A_j(z_{hj})) = I(n) \setminus \mathrm{mod}(A)$, και η απόδειξη είναι πλήρης.

Ορισμός Α.3

Η πράξη της άρνησης (¬) όπως ορίστηκε στην πρόταση Α.4, για τελεστή διάζευξης τον τελεστή της κανονικής διάζευξης (ορισμός Α.1) και τελεστή σύζευξης τον τελεστή της κανονικής σύζευξης (ορισμός Α.2) θα ονομάζεται *κανονική άρνηση* (*normal negation*).

Ορισμός Α.4

Έστω οι πράξεις της κανονικής διάζευξης (∨), κανονικής σύζευξης (∧) και κανονικής άρνησης (¬). Ο λογικά πλήρης χώρος διάστασης n ($\mathbb{C}^{*\times n}$,∨,∧,¬) εφοδιασμένος με τις παραπάνω πράξεις θα ονομάζεται *κανονικός*. Ο μετασχηματισμός TT όπως ορίζεται σε ένα κανονικό λογικά πλήρη χώρο θα λέγεται *κανονικός μετασχηματισμός πινάκων*.

Πρόταση Α.5

Έστω μία ικανοποιήσιμη έκφραση $p \in L^*$ σε DNF, και έστω P ο πίνακας που προκύπτει χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο που περιγράφεται στο κεφάλαιο 4, ενότητα 4.2. Έστω επίσης ο κανονικός μετασχηματισμός TT (ορισμός Α.4). Τότε ισχύει η ισότητα TT(p)=P.

Απόδειξη

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $p=\alpha_j$ για κάποιο $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, $\alpha_j \in L$, τότε η διαδικασία της ενότητας 4.2 θα μας δώσει τον πίνακα:
  P=[0 … 0 1 0 … 0] όπου το στοιχείο 1 βρίσκεται στην j στήλη. Άρα $P=A_j$.
  Ο μετασχηματισμός TT εξ ορισμού (ορισμός 4.12) θα δώσει $TT(p)=A_j=P$.
- Αν $p=\neg\alpha_j$ για κάποιο $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, $\alpha_j \in L$, τότε η διαδικασία της ενότητας 4.2 θα μας δώσει τον πίνακα:
  P=[0 … 0 i 0 … 0] όπου το στοιχείο i βρίσκεται στην j στήλη. Άρα $P=A_j(i)$.
  Ο μετασχηματισμός TT εξ ορισμού (ορισμός 4.12) θα δώσει:
  $TT(p)=TT(\neg\alpha_j)=\neg TT(\alpha_j)=\neg A_j=\neg A_j(1)$, άρα από την πρόταση Α.4, αφού $1 \in (\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-) \setminus \mathbb{C}_0$, παίρνουμε: $TT(p) = A_j(\overline{1} \cdot i) = A_j(i) = P$.
- Αν ο p είναι ελάχιστος όρος, τότε η διαδικασία της ενότητας 4.2 θα μας δώσει τον πίνακα:
  $P=[z_1\ z_2\ \ldots\ z_n]$ όπου για κάθε z_j, $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ ισχύει:
  - $z_j=0$ ανν το α_j δεν εμφανίζεται στον p

- z_j=1 ανν το α_j εμφανίζεται σαν κατάφαση στον p
- z_j=i ανν το α_j εμφανίζεται σαν άρνηση στον p

Ορίζουμε 3 σύνολα, τα P^+, P^-, P^0 τέτοια ώστε $P^+\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$, $P^-\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$, $P^0\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$, με την εξής ιδιότητα:

$j\in P^+\Leftrightarrow$το άτομο α_j εμφανίζεται ως κατάφαση στον ελάχιστο όρο p

$j\in P^-\Leftrightarrow$το άτομο α_j εμφανίζεται ως άρνηση στον ελάχιστο όρο p

$j\in P^0\Leftrightarrow$το άτομο α_j δεν εμφανίζεται στον ελάχιστο όρο p

Είναι προφανές ότι $P^+\cap P^-=\varnothing$, $P^+\cap P^0=\varnothing$, $P^0\cap P^-=\varnothing$, $P^+\cup P^-\cup P^0=\{1,2,\ldots,n\}$.

Συνεπώς για τον πίνακα P έχουμε ότι για το κάθε στοιχείο του z_j, $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ ισχύει ότι:

- $z_j=0\Leftrightarrow j\in P^0$
- $z_j=1\Leftrightarrow j\in P^+$
- $z_j=i\Leftrightarrow j\in P^-$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι η p μπορεί και να γραφεί ως:

$p=\underset{j\in P^+\cup P^-}{\wedge} b_j$, όπου $b_j=\alpha_j$ ανν $j\in P^+$ και $b_j=\neg\alpha_j$ ανν $j\in P^-$.

Από τον ορισμό του μετασχηματισμού TT (ορισμός 4.12) έχουμε:

$$TT(p)=TT(\underset{j\in P^+\cup P^-}{\wedge} b_j)=\underset{j\in P^+\cup P^-}{\wedge} TT(b_j) \quad (1).$$

Για κάθε $j\in P^+$ ισχύει ότι $TT(b_j)=TT(\alpha_j)=A_j$.

Για κάθε $j\in P^-$ ισχύει ότι $TT(b_j)=TT(\neg\alpha_j)=\neg A_j=A_j(i)$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $j\in P^+\cup P^-$ ισχύει ότι $TT(b_j)\in\mathbb{C}^{(+)1\times n}$, οπότε από το λήμμα Α.3 και τον ορισμό 5.1, η σχέση (1) μας δίνει:

$$(1)\Rightarrow TT(p)=\underset{j\in P^+\cup P^-}{\wedge} TT(b_j)=\sum_{j\in P^+\cup P^-}TT(b_j)=\sum_{j\in P^+}TT(b_j)+\sum_{j\in P^-}TT(b_j)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow TT(p)=\sum_{j\in P^+}A_j+\sum_{j\in P^-}A_j(i) \quad (2).$$

Έστω τώρα ότι $TT(p)=[w_1\ w_2\ \ldots\ w_n]$. Από τον ορισμό των A_j και $A_j(i)$, έχουμε ότι για κάθε $j\in\{1,2,\ldots,n\}$:

- $w_j=0+\ldots+0+1+0+\ldots+0=1$ ανν $j\in P^+$
- $w_j=0+\ldots+0+i+0+\ldots+0=i$ ανν $j\in P^-$
- $w_j=0+0+\ldots+0=0$ ανν $j\in P^0$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι για κάθε $j\in P^+\cup P^-\cup P^0=\{1,2,\ldots,n\}$ ισχύει ότι $w_j=z_j$, άρα λοιπόν έπεται ότι και για ελάχιστους όρους ισχύει P=TT(p).

- Στην γενική περίπτωση, η πρόταση p είναι η διάζευξη κάποιων (έστω $m\in\mathbb{N}^*$ το πλήθος) ελάχιστων όρων. Τότε η διαδικασία της ενότητας 4.2 θα δώσει έναν πίνακα $P\in\mathbb{C}^{m\times n}$. Κάθε γραμμή του πίνακα αυτού θα αντιστοιχεί σε έναν ελάχιστο

όρο, άρα λοιπόν έστω $P^{(j)}\in\mathbb{C}^{1\times n}$, $j\in\{1,2,\ldots,m\}$ ώστε $P=P^{(1)}|P^{(2)}|\ldots|P^{(m)}$. Κάθε ένας από τους $P^{(j)}$, $j\in\{1,2,\ldots,m\}$ αντιστοιχεί σε έναν ελάχιστο όρο, έστω τον $p_j\in L^*$, και από τα παραπάνω έχουμε ότι $TT(p_j)=P^{(j)}$, για όλα τα $j\in\{1,2,\ldots,m\}$.
Έτσι έχουμε ότι:
$TT(p)=TT(p_1\vee p_2\vee\ldots\vee p_m)=TT(p_1)\vee TT(p_2)\vee\ldots\vee TT(p_m)=P^{(1)}|P^{(2)}|\ldots|P^{(m)}=P$, και η απόδειξη είναι πλήρης.

Η παραπάνω πρόταση αποδεικνύει ότι ο άτυπος (αλγοριθμικός) τρόπος με τον οποίο ορίσαμε τον μετασχηματισμό TT στην ενότητα 4.2 είναι ένας από τους πιθανούς τρόπους ορισμού της. Έτσι, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την απόδειξη αποτελεσμάτων, όπως αυτά που θα δούμε στην ενότητα Α.4 αυτού του παραρτήματος.

Ενδιαφέρον έχουν επίσης οι παρακάτω ιδιότητες:

Πρόταση Α.6

- Έστω δύο τελεστές $\neg\in\mathcal{F}_\neg$, $\wedge\in\mathcal{F}_\wedge$. Τότε για τον τελεστή που ορίζεται από τον τύπο: $A\vee B=\neg((\neg A)\wedge(\neg B))$, για κάθε $A,B\in\mathbb{C}^{*\times n}$, ισχύει $\vee\in\mathcal{F}_\vee$.
- Έστω δύο τελεστές $\neg\in\mathcal{F}_\neg$, $\vee\in\mathcal{F}_\vee$. Τότε για τον τελεστή που ορίζεται από τον τύπο: $A\wedge B=\neg((\neg A)\vee(\neg B))$, για κάθε $A,B\in\mathbb{C}^{*\times n}$, ισχύει $\wedge\in\mathcal{F}_\wedge$.

Απόδειξη

Έστω τυχαίοι $A,B\in\mathbb{C}^{*\times n}$.
Για τον πρώτο ισχυρισμό έχουμε ότι:
$mod(A\vee B)=mod(\neg((\neg A)\wedge(\neg B)))=I(n)\backslash mod((\neg A)\wedge(\neg B))=$
$=I(n)\backslash(mod(\neg A)\cap mod(\neg B))=(I(n)\backslash mod(\neg A))\cup(I(n)\backslash mod(\neg B))=$
$=(I(n)\backslash(I(n)\backslash mod(A)))\cup(I(n)\backslash(I(n)\backslash mod(B)))=mod(A)\cup mod(B)$, οπότε $\vee\in\mathcal{F}_\vee$.
Για τον δεύτερο ισχυρισμό έχουμε ότι:
$mod(A\wedge B)=mod(\neg((\neg A)\vee(\neg B)))=I(n)\backslash mod((\neg A)\vee(\neg B))=$
$=I(n)\backslash(mod(\neg A)\cup mod(\neg B))=(I(n)\backslash mod(\neg A))\cap(I(n)\backslash mod(\neg B))=$
$=(I(n)\backslash(I(n)\backslash mod(A)))\cap(I(n)\backslash(I(n)\backslash mod(B)))=mod(A)\cap mod(B)$, οπότε $\wedge\in\mathcal{F}_\wedge$.

Με την βοήθεια της παραπάνω πρότασης μας είναι αρκετό να ορίσουμε μία πράξη άρνησης και μία διάζευξης, είτε μία πράξη άρνησης και μία σύζευξης για να έχουμε έναν λογικά πλήρη χώρο. Παρόλα αυτά, έχουμε την δυνατότητα να ορίσουμε και με διαφορετικό τρόπο τις πράξεις (δηλαδή με τρόπο ώστε $A\vee B\neq\neg((\neg A)\wedge(\neg B))$ και αντίστοιχα $A\wedge B\neq\neg((\neg A)\vee(\neg B))$), αρκεί να ανήκουν στις σχετικές κλάσεις.

A.3 Συναρτήσεις Αξιοπιστίας και Επιλογής Γραμμών

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε κάποιους πιθανούς τρόπους ορισμού των συναρτήσεων αξιοπιστίας στοιχείου και γραμμής, καθώς και της συνάρτησης επιλογής γραμμών. Κάποιοι από τους ορισμούς θα μας φανούν εξαιρετικά χρήσιμοι στις αποδείξεις της ενότητας Α.4.

Πρόταση Α.7

Ορίζουμε την συνάρτηση $RE_0:\mathbb{C}\to\mathbb{R}^+$, ώστε για κάθε $z\in\mathbb{C}$, για το οποίο x=Re(z), y=Im(z), να ισχύει:
$RE_0(z)=RE_0(x+yi)=1-\min\{1,|x|,|y|\}$.

Επιπλέον, ορίζουμε την συνάρτηση $RE:\mathbb{C}^{*\times n}\to\mathbb{R}^{(+)*\times n}$, τέτοια ώστε για κάθε πίνακα $A=[z_{ij}]$ να ισχύει: $RE(A)=[RE_0(z_{ij})]$.

Τότε: $RE_0\in\mathcal{F}_{RE0}$ και $RE\in\mathcal{F}_{RE}$.

Απόδειξη

Έστω $z\in\mathbb{C}$, ώστε Re(z)=x, Im(z)=y.

Προφανώς, για κάθε $z\in\mathbb{C}$, $0\le\min\{1,|x|,|y|\}\le1\Rightarrow$

$\Rightarrow0\le1-\min\{1,|x|,|y|\}\le1\Rightarrow RE_0(z)\ge0\Rightarrow RE_0(z)\in\mathbb{R}^+$.

Επιπλέον:
$RE_0(x+yi)=1-\min\{1,|x|,|y|\}=1-\min\{1,|y|,|x|\}=RE_0(y+xi)$ και
$RE_0(x+yi)=1-\min\{1,|x|,|y|\}=1-\min\{1,|-x|,|-y|\}=RE_0(-x-yi)$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι $RE_0\in\mathcal{F}_{RE0}$. Από το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με τον ορισμό της συνάρτησης RE, έπεται ότι $RE\in\mathcal{F}_{RE}$, και η απόδειξη είναι πλήρης.

Η παραπάνω συνάρτηση αξιοπιστίας είναι αρκετά απλή και θα χρησιμοποιηθεί για την εξομοίωση του αλγορίθμου του Dalal. Λόγω της ειδικής μορφής των στοιχείων που θα εμφανίζονται στην συγκεκριμένη εξομοίωση, το παρακάτω λήμμα θα μας φανεί αρκετά χρήσιμο:

Λήμμα Α.4

Για κάθε $z\in\mathbb{C}^{(+)}$, Re(z)=x, Im(z)=y, για τον οποίο $x\le1$ ή $y\le1$, έπεται ότι:
$RE_0(z)=1-\min\{x,y\}$, όπου RE_0 η συνάρτηση που ορίστηκε στην πρόταση Α.7.

Απόδειξη

Προφανώς ισχύει: |x|=x, |y|=y και $\min\{1,|x|,|y|\}=\min\{1,x,y\}=\min\{x,y\}$. Άρα η πρόταση ισχύει.

Πρόταση Α.8

Έστω $w\in\mathbb{R}^{(+)}$. Ορίζουμε την συνάρτηση $RL_0:\mathbb{R}^{(+)1\times n}\to\mathbb{R}^{+}$, τέτοια ώστε για κάθε $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^{(+)}$:

$$RL_0(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{j=1}^{n}x_j^w .$$

Επιπλέον, ορίζουμε την συνάρτηση $RL:\mathbb{R}^{(+)*\times n}\to\mathbb{R}^{(+)*\times 1}$, τέτοια ώστε για κάθε $k\in\mathbb{N}^*$ και $A\in\mathbb{R}^{(+)k\times n}$, με $A=A^{(1)}|A^{(2)}|\ldots|A^{(k)}$, $A^{(j)}\in\mathbb{R}^{(+)1\times n}$, $j\in\{1,2,\ldots,k\}$:

$$RL(A)=\begin{bmatrix} RL_0(A^{(1)}) \\ RL_0(A^{(2)}) \\ \ldots \\ RL_0(A^{(n)}) \end{bmatrix}.$$

Τότε: $RL_0\in\mathcal{F}_{RL0}$ and $RL\in\mathcal{F}_{RL}$, για οποιαδήποτε τιμή του $w\in\mathbb{R}^{(+)}$.

Απόδειξη

Καταρχήν, είναι προφανές ότι $RL_0(x_1,x_2,\ldots,x_n)\geq 0$ για κάθε $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^{(+)}$.

Επίσης, για κάθε $j, k\in\{1,2,\ldots,n\}$, $j<k$ και $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^{(+)}$ είναι προφανές ότι:

$RL_0(x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_k,\ldots,x_n)=RL_0(x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots,x_j,\ldots,x_n)$.

Επιπλέον, είναι εμφανές ότι για κάθε $x,y,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^{(+)}$, τέτοιο ώστε $y\geq x$, ισχύει $RL_0(y,x_2,\ldots,x_n)\geq RL_0(x,x_2,\ldots,x_n)$, αφού $w\geq 0$.

Συνεπώς $RL_0\in\mathcal{F}_{RL0}$. Από το γεγονός αυτό και τον ορισμό της συνάρτησης RL, έπεται ότι $RL\in\mathcal{F}_{RL}$, και η απόδειξη είναι πλήρης.

Για λόγους απλότητας, συνήθως θα χρησιμοποιούμε την τιμή $w=1$ για την παράμετρο της παραπάνω πρότασης. Όσο μεγαλώνει η παραμέτρος w τόσο περισσότερο επηρρεάζεται η αξιοπιστία γραμμής από την ύπαρξη στοιχείων μεγάλης αξιοπιστίας. Η παραπάνω συνάρτηση αξιοπιστίας γραμμής, για $w=1$, θα χρησιμοποιηθεί και στην εξομοίωση του αλγορίθμου του Dalal, όπως και η παρακάτω συνάρτηση επιλογής γραμμών:

Πρόταση Α.9

Έστω $LS:\mathbb{R}^{(+)*\times 1}\to P(\mathbb{N}^*)$ η συνάρτηση η οποία για κάθε $k\in\mathbb{N}^*$, και κάθε πίνακα $A\in\mathbb{R}^{(+)k\times 1}$ της μορφής:

$$A=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_k \end{bmatrix},$$

ορίζεται ως εξής:

$LS(A)=\{m\in\{1,2,\ldots,k\}:\forall j\in\{1,2,\ldots,k\}\ x_m\geq x_j\}$. Τότε $LS\in\mathcal{F}_{LS}$.

Απόδειξη

Είναι σαφές ότι για κάθε πίνακα $A\in\mathbb{R}^{(+)k\times 1}$, $\varnothing\subset LS(A)\subseteq\{1,2,\ldots,k\}$, άρα $LS\in\mathcal{F}_{LS}$.

Πρόταση Α.10

Ορίζουμε την συνάρτηση $RL_0:\mathbb{R}^{(+)1\times n}\rightarrow\mathbb{R}^{+}$, τέτοια ώστε για κάθε $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^{(+)}$:

$$RL_0(x_1,x_2,...,x_n)=\prod_{j=1}^{n}x_j\ .$$

Επιπλέον, ορίζουμε την συνάρτηση $RL:\mathbb{R}^{(+)*\times n}\rightarrow\mathbb{R}^{(+)*\times 1}$, τέτοια ώστε για κάθε $k\in\mathbb{N}^*$ και $A\in\mathbb{R}^{(+)k\times n}$, με $A=A^{(1)}|A^{(2)}|\ldots|A^{(k)}$, $A^{(j)}\in\mathbb{R}^{(+)1\times n}$, $j\in\{1,2,\ldots,k\}$:

$$RL(A)=\begin{bmatrix}RL_0(A^{(1)})\\RL_0(A^{(2)})\\\ldots\\RL_0(A^{(n)})\end{bmatrix}.$$

Τότε: $RL_0\in\mathcal{F}_{RL0}$ and $RL\in\mathcal{F}_{RL}$.

Απόδειξη

Καταρχήν, είναι προφανές ότι $RL_0(x_1,x_2,\ldots,x_n)\geq 0$ για κάθε $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^{(+)}$.

Επίσης, για κάθε $j,k\in\{1,2,\ldots,n\}$, $j<k$ και $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^{(+)}$ είναι προφανές ότι:

$RL_0(x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_k,\ldots,x_n)=RL_0(x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots,x_j,\ldots,x_n)$.

Επιπλέον, είναι εμφανές ότι για κάθε $x,y,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^{(+)}$, τέτοιο ώστε $y\geq x$, ισχύει $RL_0(y,x_2,\ldots,x_n)\geq RL_0(x,x_2,\ldots,x_n)$.

Συνεπώς $RL_0\in\mathcal{F}_{RL0}$. Από το γεγονός αυτό και τον ορισμό της συνάρτησης RL, έπεται ότι $RL\in\mathcal{F}_{RL}$, και η απόδειξη είναι πλήρης.

Η παραπάνω πρόταση παρέχει έναν εναλλακτικό τρόπο ορισμού της αξιοπιστίας γραμμών ο οποίος όμως επηρρεάζεται πάρα πολύ από μικρές μεταβολές της αξιοπιστίας στοιχείων. Η παρακάτω συνάρτηση επιλογής γραμμών επιλέγει τις λιγότερο αξιόπιστες γραμμές, σε αντίθεση με την συνάρτηση της πρότασης Α.9 που επιλέγει τις περισσότερο αξιόπιστες:

Πρόταση Α.11

Έστω $LS:\mathbb{R}^{(+)*\times 1}\rightarrow P(\mathbb{N}^*)$ η συνάρτηση η οποία για κάθε $k\in\mathbb{N}^*$, και κάθε πίνακα $A\in\mathbb{R}^{(+)k\times 1}$ της μορφής:

$$A=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_k \end{bmatrix},$$

ορίζεται ως εξής:

$LS(A)=\{m\in\{1,2,\dots,k\}:\forall j\in\{1,2,\dots,k\}\ x_m\le x_j\}$. Τότε $LS\in\mathcal{F}_{LS}$.

Απόδειξη

Είναι σαφές ότι για κάθε πίνακα $A\in\mathbb{R}^{(+)k\times 1}$, $\varnothing\subset LS(A)\subseteq\{1,2,\dots,k\}$, άρα $LS\in\mathcal{F}_{LS}$.

Η παρακάτω συνάρτηση δίνει την αξιοπιστία ενός στοιχείου x+yi σαν συνάρτηση της διαφοράς του πραγματικού από το φανταστικό του μέρος:

Πρόταση Α.12

Ορίζουμε την συνάρτηση $RE_0:\mathbb{C}\to\mathbb{R}^+$, ώστε για κάθε $z\in\mathbb{C}$, για το οποίο x=Re(z), y=Im(z), να ισχύει:
$RE_0(z)=RE_0(x+yi)=|x-y|$.

Επιπλέον, ορίζουμε την συνάρτηση $RE:\mathbb{C}^{*\times n}\to\mathbb{R}^{(+)*\times n}$, τέτοια ώστε για κάθε πίνακα $A=[z_{ij}]$ να ισχύει: $RE(A)=[RE_0(z_{ij})]$.

Τότε: $RE_0\in\mathcal{F}_{RE0}$ και $RE\in\mathcal{F}_{RE}$.

Απόδειξη

Έστω $z\in\mathbb{C}$, ώστε Re(z)=x, Im(z)=y.

Προφανώς, για κάθε $z\in\mathbb{C}$, $|x-y|\ge 0\Rightarrow RE_0(z)\in\mathbb{R}^+$.

Επιπλέον:
$RE_0(x+yi)=|x-y|=|-(x-y)|=|y-x|=RE_0(y+xi)$ και
$RE_0(x+yi)=|x-y|=|-(x-y)|=|(-x)-(-y)|=RE_0(-x-yi)$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι $RE_0\in\mathcal{F}_{RE0}$. Από το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με τον ορισμό της συνάρτησης RE, έπεται ότι $RE\in\mathcal{F}_{RE}$, και η απόδειξη είναι πλήρης.

Α.4 Αποδείξεις Κεφαλαίου 6

Στην ενότητα αυτή θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε κάποια λήμματα, με την βοήθεια των οποίων θα αποδείξουμε την πρόταση 6.1. Επίσης, θα αποδειχθεί με αυστηρό τρόπο η πρόταση 6.2.

Λήμμα Α.5

Έστω G ο μετασχηματισμός ο οποίος ορίζεται στις δημοσιεύσεις του Dalal ([8, 9]). Τότε για κάθε λογική πρόταση $p, q\in L^*$ και κάθε $k\in\mathbb{N}^*$ ισχύει:

$G^k(p\vee q)\cong G^k(p)\vee G^k(q)$.

Απόδειξη

Για k=0, $G^0(p)=p$ για κάθε $p\in L^*$, άρα η ισότητα ισχύει με τετριμμένο τρόπο.

Για k=1, από τον ορισμό του G στην δημοσίευση [9], έχουμε:

$\mathrm{mod}(G^1(p\vee q))=\mathrm{mod}(G(p\vee q))=g(\mathrm{mod}(p\vee q))=g(\mathrm{mod}(p)\cup\mathrm{mod}(q))=$

$$= \bigcup_{I\in \mathrm{mod}(p)\cup \mathrm{mod}(q)} g(I) = (\bigcup_{I\in \mathrm{mod}(p)} g(I)) \cup (\bigcup_{I\in \mathrm{mod}(q)} g(I)) = g(\mathrm{mod}(p)) \cup g(\mathrm{mod}(q)) =$$

$=\mathrm{mod}(G(p))\cup\mathrm{mod}(G(q))=\mathrm{mod}(G(p)\vee G(q))=\mathrm{mod}(G^1(p)\vee G^1(q))$, οπότε:

$G^1(p\vee q)\cong G^1(p)\vee G^1(q)$.

Ας υποθέσουμε ότι η εξίσωση ισχύει για k=0,1,2,…,m. Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει για k=m+1. Πράγματι:

$G^{m+1}(p\vee q)\cong G^m(G(p\vee q))\cong G^m(G(p)\vee G(q))\cong G^m(G(p))\vee G^m(G(q))\cong G^{m+1}(p)\vee G^{m+1}(q)$, και η απόδειξη είναι πλήρης.

Λήμμα Α.6

Έστω $p\in L^*$, ώστε ο p να είναι ελάχιστος όρος. Τότε υπάρχουν μοναδικά σύνολα: P^0, P^+, $P^-\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$, για τα οποία να ισχύει: $P^+\cap P^-=\varnothing$, $P^+\cap P^0=\varnothing$, $P^-\cap P^0=\varnothing$, $P^0\cup P^+\cup P^-=\{1,2,\ldots,n\}$ και:

$$TT(p) = \sum_{j\in P^+} A_j + \sum_{j\in P^-} A_j(i),$$

όπου TT είναι ο κανονικός μετασχηματισμός πινάκων (ορισμός Α.4).

Απόδειξη

Αν επιλέξουμε τα σύνολα:

$P^+=\{j\in\{1,2,\ldots,n\}:\alpha_j$ εμφανίζεται ως κατάφαση στον p$\}$,

$P^-=\{j\in\{1,2,\ldots,n\}:\alpha_j$ εμφανίζεται ως άρνηση στον p$\}$,

$P^0=\{j\in\{1,2,\ldots,n\}:\alpha_j$ δεν εμφανίζεται στον p$\}$.

Για τα σύνολα αυτά είναι προφανές ότι ισχύουν οι απαιτήσεις του λήμματος:

$P^+\cap P^-=\varnothing$, $P^+\cap P^0=\varnothing$, $P^-\cap P^0=\varnothing$, $P^0\cup P^+\cup P^-=\{1,2,\ldots,n\}$.

Ο πίνακας TT(p) λόγω της πρότασης Α.5 θα είναι ο ίδιος με αυτόν που θα προκύψει χρησιμοποιώντας την διαδικασία της ενότητας 4.2 (έστω P), δηλαδή ισχύει P=TT(p).

Από τα σχόλια της ενότητας 4.2 όμως (βλέπε και απόδειξη πρότασης Α.5) είναι σαφές ότι:

$$P = \sum_{j\in P^+} A_j + \sum_{j\in P^-} A_j(i) \Rightarrow TT(p) = \sum_{j\in P^+} A_j + \sum_{j\in P^-} A_j(i).$$

Λήμμα Α.7

Έστω $p,q\in L^*$, δύο ελάχιστοι όροι και P^0,P^+,P^-,Q^0,Q^+,Q^-, σύνολα ακεραίων τέτοια ώστε:

$P^0,P^+,P^-\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$, $P^+\cap P^-=\varnothing$, $P^+\cap P^0=\varnothing$, $P^-\cap P^0=\varnothing$, $P^0\cup P^+\cup P^-=\{1,2,\ldots,n\}$, $Q^0,Q^+,Q^-\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$, $Q^+\cap Q^-=\varnothing$, $Q^+\cap Q^0=\varnothing$, $Q^-\cap Q^0=\varnothing$, $Q^0\cup Q^+\cup Q^-=\{1,2,\ldots,n\}$ και $P=\sum_{j\in P^+}A_j+\sum_{j\in P^-}A_j(i)=TT(p)$, $Q=\sum_{j\in Q^+}A_j+\sum_{j\in Q^-}A_j(i)=TT(q)$.

Επιπλέον ορίζουμε το σύνολο ατόμων: $S=\{\alpha_j|j\in(P^+\cap Q^-)\cup(P^-\cap Q^+)\}$.

Τότε ο ελάχιστος $k\in\mathbb{N}$ για τον οποίο $\mathrm{mod}(G^k(p)\wedge q)\neq\varnothing$ είναι ο $k=|S|$ (όπου G ο μετασχηματισμός του Dalal [8, 9]).

Επιπλέον, $\mathrm{mod}(res_S(p)\wedge q)\neq\varnothing$ και το S είναι το μοναδικό σύνολο με k στοιχεία με την ιδιότητα αυτή.

Τέλος, $\mathrm{mod}(G^k(p)\wedge q)=K_1\times K_2\times\ldots\times K_n$ όπου για κάθε $j\in\{1,2,\ldots,n\}$:

- $K_j=\{1\}$, ανν $j\in Q^+\cup(Q^0\cap P^+)$
- $K_j=\{0\}$, ανν $j\in Q^-\cup(Q^0\cap P^-)$
- $K_j=\{0,1\}$, ανν $j\in Q^0\cap P^0$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $k<|S|\leq n$ ώστε $\mathrm{mod}(G^k(p)\wedge q)\neq\varnothing$.

Από τον ορισμό των συνόλων P^+,P^- (λήμμα Α.6), και από το θεώρημα 5.6 του Dalal ([8]) προκύπτει ότι για το συγκεκριμένο $k\in\mathbb{N}^*$:

$$G^k(p)=\bigvee_{U\subseteq\{a_1,a_2,\ldots,a_n\},|U|=k}res_U(p)\Rightarrow G^k(p)\wedge q=\bigvee_{U\subseteq\{a_1,a_2,\ldots,a_n\},|U|=k}(res_U(p)\wedge q)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\bigcup_{U\subseteq\{a_1,a_2,\ldots,a_n\},|U|=k}\mathrm{mod}(res_U(p)\wedge q)\neq\varnothing.$$

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα σύνολο U, με $|U|<|S|$, ώστε $\mathrm{mod}(res_U(p)\wedge q)\neq\varnothing$.

Όμως, για κάθε τέτοιο σύνολο, υπάρχει άτομο $\alpha_j\in S$ ώστε $\alpha_j\notin U$.

Αρχικά υποθέτουμε ότι $j\in P^+\cap Q^-$. Τότε, το άτομο α_j εμφανίζεται ως κατάφαση στον ελάχιστο όρο p και σαν άρνηση στον ελάχιστο όρο q (λήμμα Α.6). Επιπλέον, από το θεώρημα 5.4 του Dalal ([8]), έπεται ότι το σύνολο μοντέλων του $res_U(p)$ διαφέρει από το σύνολο μοντέλων του p στις αληθοτιμές των ατόμων του συνόλου U, το πολύ. Συνεπώς, για κάθε ερμηνεία $I=(b_1,b_2,\ldots,b_n)\in\mathrm{mod}(res_U(p))$, πρέπει να ισχύει ότι $b_j=1$, γιατί το α_j εμφανίζεται ως κατάφαση στον p ($\alpha_j\in P^+$) και $\alpha_j\notin U$. Από την άλλη μεριά, για κάθε ερμηνεία $I'=(c_1,c_2,\ldots,c_n)\in\mathrm{mod}(q)$, πρέπει να ισχύει ότι $c_j=0$, αφού το άτομο α_j εμφανίζεται ως άρνηση στον q ($\alpha_j\in Q^-$). Συνεπώς, δεν υπάρχει ερμηνεία $I\in\mathrm{mod}(res_U(p))$ τέτοια ώστε $I\in\mathrm{mod}(q)$, συνεπώς $\mathrm{mod}(res_U(p)\wedge q)=\varnothing$, άτοπο. Άρα, για κάθε $j\in P^+\cap Q^-$ ισχύει $a_j\in U$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι για κάθε $j\in P^-\cap Q^+$ ισχύει $\alpha_j\in U$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι $\alpha_j\in S\Rightarrow\alpha_j\in U$, συνεπώς για κάθε U έτσι ώστε $\mathrm{mod}(res_U(p)\wedge q)\neq\varnothing$ πρέπει να ισχύει ότι $U\supseteq S$ συνεπώς $|U|\geq|S|$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $k\in\mathbb{N}$ για το οποίο $\mathrm{mod}(G^k(p)\wedge q)\neq\varnothing$ ισχύει ότι $k\geq|S|$.

Θα δείξουμε τώρα ότι $mod(res_S(p)\wedge q)\neq\varnothing$.

Είναι γνωστό ότι $mod(p)=I_1\times I_2\times\ldots\times I_n$, όπου για κάθε $j\in\{1,2,\ldots,n\}$:

- $I_j=\{0\}$ ανν το άτομο α_j εμφανίζεται ως άρνηση στον p, δηλαδή ανν $j\in P^-$
- $I_j=\{1\}$ ανν το άτομο α_j εμφανίζεται ως κατάφαση στον p, δηλαδή ανν $j\in P^+$
- $I_j=\{0,1\}$ ανν το άτομο α_j δεν εμφανίζεται στον p, δηλαδή ανν $j\in P^0$

Επιπλέον, το σύνολο $mod(res_S(p))$ περιέχει όλες τις ερμηνείες του mod(p) και επιπλέον όλες τις ερμηνείες του I(n) οι οποίες διαφέρουν από κάποια ερμηνεία του mod(p) στις αληθοτιμές ενός ή περισσοτέρων ατόμων του συνόλου S.

Συνεπώς $mod(res_S(p))=J_1\times J_2\times\ldots\times J_n$, όπου για κάθε $j\in\{1,2,\ldots,n\}$:

- $J_j=\{0,1\}$ ανν $j\in(P^+\cap Q^-)\cup(P^-\cap Q^+)\Leftrightarrow a_j\in S$
- $J_j=I_j$ ανν $j\notin(P^+\cap Q^-)\cup(P^-\cap Q^+)\Leftrightarrow a_j\notin S$

Ομοίως, $mod(q)=L_1\times L_2\times\ldots\times L_n$, όπου:

- $L_j=\{0\}$ ανν το άτομο α_j εμφανίζεται ως άρνηση στον q, δηλαδή ανν $j\in Q^-$
- $L_j=\{1\}$ ανν το άτομο α_j εμφανίζεται ως κατάφαση στον q, δηλαδή ανν $j\in Q^+$
- $L_j=\{0,1\}$ ανν το άτομο α_j δεν εμφανίζεται στον q, δηλαδή ανν $j\in Q^0$

Έπεται ότι: $mod(res_S(p)\wedge q)=mod(res_S(p))\cap mod(q)=$

$=(J_1\times J_2\times\ldots\times J_n)\cap(L_1\times L_2\times\ldots\times L_n)=(J_1\cap L_1)\times(J_2\cap L_2)\times\ldots\times(J_n\cap L_n)$.

Θέτουμε $K_j=J_j\cap L_j$, για κάθε $j\in\{1,2,\ldots,n\}$. Τότε για κάθε $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ ισχύει:

- αν $j\in Q^+$, τότε $L_j=\{1\}$ και:
  - αν $j\in P^+$, τότε $J_j=\{1\}\Rightarrow K_j=J_j\cap L_j=\{1\}$.
  - αν $j\in P^-$, τότε $J_j=\{0,1\}\Rightarrow K_j=J_j\cap L_j=\{1\}$.
  - αν $j\in P^0$, τότε $J_j=\{0,1\}\Rightarrow K_j=J_j\cap L_j=\{1\}$.
- αν $j\in Q^-$, τότε $L_j=\{0\}$ και:
  - αν $j\in P^+$, τότε $J_j=\{0,1\}\Rightarrow K_j=J_j\cap L_j=\{0\}$.
  - αν $j\in P^-$, τότε $J_j=\{0\}\Rightarrow K_j=J_j\cap L_j=\{0\}$.
  - αν $j\in P^0$, τότε $J_j=\{0,1\}\Rightarrow K_j=J_j\cap L_j=\{0\}$.
- αν $j\in Q^0$, τότε $L_j=\{0,1\}$ και:
  - αν $j\in P^+$, τότε $J_j=\{1\}\Rightarrow K_j=J_j\cap L_j=\{1\}$.
  - αν $j\in P^-$, τότε $J_j=\{0\}\Rightarrow K_j=J_j\cap L_j=\{0\}$.
  - αν $j\in P^0$, τότε $J_j=\{0,1\}\Rightarrow K_j=J_j\cap L_j=\{0,1\}$.

Συνοψίζοντας τις παραπάνω 9 περιπτώσεις, και για κάθε $j\in\{1,2,\ldots,n\}$, προκύπτει ότι:

- $K_j=\{1\}$, ανν $j\in Q^+\cup(Q^0\cap P^+)$
- $K_j=\{0\}$, ανν $j\in Q^-\cup(Q^0\cap P^-)$
- $K_j=\{0,1\}$, ανν $j\in Q^0\cap P^0$

Συνεπώς: $mod(res_S(p)\wedge q)=K_1\times K_2\times\ldots\times K_n\neq\varnothing$.

Σε συνδυασμό με το γεγονός ότι για το ελάχιστο $k\in\mathbb{N}$ για το οποίο $\mathrm{mod}(G^k(p)\wedge q)\neq\varnothing$ ισχύει ότι $k\geq|S|$, η παραπάνω εξίσωση δίνει ότι για το συγκεκριμένο k ισχύει $k=|S|$. Επιπλέον, αφού για κάθε σύνολο U από άτομα για το οποίο $\mathrm{mod}(res_U(p)\wedge q)\neq\varnothing$ πρέπει να ισχύει ότι $U\supseteq S$, και δεδομένου ότι $\mathrm{mod}(res_S(p)\wedge q)\neq\varnothing$, έχουμε ότι το μοναδικό σύνολο ατόμων U το οποίο έχει $k=|S|$ στοιχεία και την ιδιότητα $\mathrm{mod}(res_U(p)\wedge q)\neq\varnothing$ είναι το S.

Τέλος, από τα παραπάνω αποτελέσματα και την ισότητα:

$G^k(p)\wedge q=\bigcup_{U\subseteq\{a_1,a_2,\ldots a_n\},|U|=k}\mathrm{mod}(res_U(p)\wedge q)$, έπεται ότι:

$\mathrm{mod}(G^k(p)\wedge q)=\mathrm{mod}(res_S(p)\wedge q)=K_1\times K_2\times\ldots\times K_n$, όπου K_j όπως παραπάνω, και η απόδειξη είναι πλήρης.

Λήμμα Α.8

Έστω σύνολα ακεραίων P^0,P^+,P^-,Q^0,Q^+,Q^-, τέτοια ώστε:

$P^0,P^+,P^-\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$, $P^+\cap P^-=\varnothing$, $P^+\cap P^0=\varnothing$, $P^-\cap P^0=\varnothing$, $P^0\cup P^+\cup P^-=\{1,2,\ldots,n\}$ και:

$Q^0,Q^+,Q^-\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$, $Q^+\cap Q^-=\varnothing$, $Q^+\cap Q^0=\varnothing$, $Q^-\cap Q^0=\varnothing$, $Q^0\cup Q^+\cup Q^-=\{1,2,\ldots,n\}$.

Έστω επίσης πίνακες $P,Q\in\mathbb{C}^{(+)1\times n}$, ώστε:

$P=\sum_{j\in P^+}A_j+\sum_{j\in P^-}A_j(i)$ και:

$Q=2\cdot(\sum_{j\in Q^+}A_j+\sum_{j\in Q^-}A_j(i))$ και $R=P\bullet Q\in\mathbb{C}^{(+)1\times n}$.

Επιπλέον, ορίζουμε τις συναρτήσεις RE και RL όπως στις προτάσεις Α.7, Α.8 αντίστοιχα όπου η παράμετρος w της συνάρτησης RL τίθεται w=1.

Τότε $RL(RE(R))=[k]$ όπου $k=n-|(P^+\cap Q^-)\cup(P^-\cap Q^+)|$.

Απόδειξη

Είναι προφανές από τον ορισμό των P^+,P^-,P^0 και του P ότι τα στοιχεία του P ανήκουν στο σύνολο $\{0,1,i\}$ και ότι το στοιχείο της j στήλης p_j ισούται με:

- 0 ανν $j\in P^0$
- 1 ανν $j\in P^+$
- i ανν $j\in P^-$

Ομοίως, τα στοιχεία του Q ανήκουν στο σύνολο $\{0,2,2i\}$ και το στοιχείο της j στήλης q_j ισούται με:

- 0 ανν $j\in Q^0$
- 2 ανν $j\in Q^+$
- 2i ανν $j\in Q^-$

Από τον ορισμό της αναθεώρησης, προκύπτει ότι: $R=P\bullet Q=P+Q$, συνεπώς τα στοιχεία του R είναι από το σύνολο:

$S=\{0,2,2i,1,3,1+2i,i,2+i,3i\}$.

Έστω $R=[r_1\ r_2\ \dots\ r_n]=[p_1+q_1\ p_2+q_2\ \dots\ p_n+q_n]$.

Από τον ορισμό των RL, RE, έχουμε ότι $RL(RE(R))=[k]$ για κάποιο $k\in\mathbb{R}^{(+)}$.

Για όλα τα $j\in\{1,2,\dots,n\}$, έχουμε ότι $r_j\in S$, συνεπώς $r_j\in\mathbb{C}^{(+)}$, και $Re(r_j)\le 1$ ή $Im(r_j)\le 1$ (επαληθεύεται εύκολα). Συνεπώς από το λήμμα Α.4, για την μοναδική γραμμή του R, προκύπτει:

$k=RL_0(RE_0(r_1),RE_0(r_2),\dots,RE_0(r_n))=$

$=1-\min\{Re(r_1),Im(r_1)\}+1-\min\{Re(r_2),Im(r_2)\}+\dots+1-\min\{Re(r_n),Im(r_n)\}=$

$=n-(\min\{Re(r_1),Im(r_1)\}+\min\{Re(r_2),Im(r_2)\}+\dots+\min\{Re(r_n),Im(r_n)\})$ (1).

Από το γεγονός ότι $r_j\in S$ για κάθε $j\in\{1,2,\dots,n\}$ επαληθεύεται εύκολα ότι για κάθε $j\in\{1,2,\dots,n\}$ ισχύει:

$\min\{Re(r_j),Im(r_j)\}=1$ ανν $r_j=1+2i$ or $r_j=2+i$ και

$\min\{Re(r_j),Im(r_j)\}=0$ διαφορετικά.

Ισοδυνάμως:

$\min\{Re(r_j),Im(r_j)\}=1$ ανν $p_j=1$, $q_j=2i$ ή $p_j=i$, $q_j=2$ το οποίο ισχύει ανν:

$j\in P^+$ και $j\in Q^-$ ή $j\in P^-$ και $j\in Q^+\Leftrightarrow j\in(P^+\cap Q^-)\cup(P^-\cap Q^+)$.

Συνεπώς:

$\min\{Re(r_1),Im(r_1)\}+\min\{Re(r_2),Im(r_2)\}+\dots+\min\{Re(r_n),Im(r_n)\}=|(P^+\cap Q^-)\cup(P^-\cap Q^+)|$.

Εφαρμόζοντας το παραπάνω αποτέλεσμα στην (1) παίρνουμε:

$k=n-|(P^+\cap Q^-)\cup(P^-\cap Q^+)|$, και η απόδειξη είναι πλήρης.

Τα παραπάνω λήμματα παρέχουν τα εργαλεία για να αποδείξουμε την πρόταση 6.1, η οποία αναφέρεται στην εξομοίωση του αλγορίθμου του Dalal.

Πρόταση 6.1

Έστω $p, q\in L^*$ δύο ικανοποιήσιμες προτάσεις σε DNF και έστω $r\in L^*$, το αποτέλεσμα της αναθεώρησης της p με την q με τον αλγόριθμο του Dalal, δηλαδή $r=p\bullet^D q$. Επιπλέον, έστω $P\in\mathbb{C}^{*\times n}$ ο πίνακας που αντιστοιχεί στην p με αξιοπιστία 1 για όλα τα άτομα ($P=TT(p)$) και $Q\in\mathbb{C}^{*\times n}$ ο πίνακας που αντιστοιχεί στην q με αξιοπιστία 2 για όλα τα άτομα ($Q=2\cdot TT(q)$), όπου η συνάρτηση TT είναι όπως ορίζεται στο παράρτημα Α, ορισμός Α.4. Τέλος, έστω οι συναρτήσεις RE, RL και LS όπως ορίζονται στο παράρτημα Α, προτάσεις Α.7, Α.8 και Α.9 αντίστοιχα. Τότε, για τον πίνακα R που προκύπτει από την αναθεώρηση του P από τον Q υπό το δικό μας μοντέλο ($R=P\bullet Q$) και για τις παραπάνω παραμέτρους, ισχύει ότι $QT(R)\cong r$.

Απόδειξη

Αρχικά θα υποθέσουμε ότι οι p, q είναι ελάχιστοι όροι. Τότε $P, Q, R\in\mathbb{C}^{(+)1\times n}$.

Επίσης ορίζουμε τα σύνολα P^+,P^-,P^0,Q^+,Q^-,Q^0 με τον συνήθη τρόπο.

Έστω $S=(P^+\cap Q^-)\cup(P^-\cap Q^+)$.

Από το λήμμα Α.7, ο ελάχιστος ακέραιος $k\in\mathbb{N}^*$ για τον οποίο $mod(G^k(p)\wedge q)\neq\varnothing$ είναι ο $k=|S|$ και για τον συγκεκριμένο k ισχύει:

$mod(G^k(p)\wedge q)=I_1\times I_2\times\ldots\times I_n$ όπου για κάθε $j\in\{1,2,\ldots,n\}$:

- $I_j=\{1\}$, ανν $j\in Q^+\cup(Q^0\cap P^+)$
- $I_j=\{0\}$, ανν $j\in Q^-\cup(Q^0\cap P^-)$
- $I_j=\{0,1\}$, ανν $j\in Q^0\cap P^0$

Συνεπώς, από τον ορισμό του τελεστή $\bullet^D$, έπεται ότι:

$mod(r)=I_1\times I_2\times\ldots\times I_n$, όπου I_j, $j\in\{1,2,...,n\}$ όπως παραπάνω.

Κάτω από το δικό μας πλαίσιο εργασίας, έχουμε ότι $R\in\mathbb{C}^{(+)1\times n}$, επομένως $B=RL(RE(R))\in\mathbb{R}^{(+)1\times 1}$.

Άρα: $\varnothing\subset LS(B)\subseteq\{1\}\Rightarrow LS(B)=\{1\}$.

Έτσι, $MS(R,LS(B))=MS(R,\{1\})=R$.

Έστω $P=[p_j]$, $Q=[q_j]$, $j=1,2,\ldots,n$.

Τότε: $R=[r_j]=[p_j+q_j]$.

Επιπλέον $MN(R)=C=[c_j]$, όπου $c_j=Re(r_j)-Im(r_j)$, άρα

- $c_j>0$ ανν $Re(r_j)>Im(r_j)$
- $c_j<0$ ανν $Re(r_j)<Im(r_j)$
- $c_j=0$ ανν $Re(r_j)=Im(r_j)$

Για κάθε $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ υπάρχουν οι ακόλουθες περιπτώσεις:

- αν $j\in Q^+$, τότε $q_j=2$ και:
  - αν $j\in P^+$, τότε $p_j=1\Rightarrow r_j=3\Rightarrow Re(r_j)>Im(r_j)\Rightarrow c_j>0$.
  - αν $j\in P^-$, τότε $p_j=i\Rightarrow r_j=2+i\Rightarrow Re(r_j)>Im(r_j)\Rightarrow c_j>0$.
  - αν $j\in P^0$, τότε $p_j=0\Rightarrow r_j=2\Rightarrow Re(r_j)>Im(r_j)\Rightarrow c_j>0$.
- αν $j\in Q^-$, τότε $q_j=2i$ και:
  - αν $j\in P^+$, τότε $p_j=1\Rightarrow r_j=1+2i\Rightarrow Re(r_j)<Im(r_j)\Rightarrow c_j<0$.
  - αν $j\in P^-$, τότε $p_j=i\Rightarrow r_j=3i\Rightarrow Re(r_j)<Im(r_j)\Rightarrow c_j<0$.
  - αν $j\in P^0$, τότε $p_j=0\Rightarrow r_j=2i\Rightarrow Re(r_j)<Im(r_j)\Rightarrow c_j<0$.
- αν $j\in Q^0$, τότε $q_j=0$ και:
  - αν $j\in P^+$, τότε $p_j=1\Rightarrow r_j=1\Rightarrow Re(r_j)>Im(r_j)\Rightarrow c_j>0$.
  - αν $j\in P^-$, τότε $p_j=i\Rightarrow r_j=i\Rightarrow Re(r_j)<Im(r_j)\Rightarrow c_j<0$.
  - αν $j\in P^0$, τότε $p_j=0\Rightarrow r_j=0\Rightarrow Re(r_j)=Im(r_j)\Rightarrow c_j=0$.

Συνοψίζοντας:

- $c_j>0$ ανν $j\in Q^+\cup(Q^0\cap P^+)$
- $c_j<0$ ανν $j\in Q^-\cup(Q^0\cap P^-)$
- $c_j=0$ ανν $j\in Q^0\cap P^0$

Συνεπώς, $mod(C)=J_1\times J_2\times\ldots\times J_n$, όπου για κάθε $j\in\{1,2,\ldots,n\}$:

- $J_j=\{1\}$ ανν $c_j>0\Leftrightarrow j\in Q^+\cup(Q^0\cap P^+)$
- $J_j=\{0\}$ ανν $c_j<0\Leftrightarrow j\in Q^-\cup(Q^0\cap P^-)$
- $J_j=\{0,1\}$ ανν $c_j=0\Leftrightarrow j\in Q^0\cap P^0$

Συγκρίνοντας τα J_j και I_j, έπεται εύκολα ότι $mod(r)=mod(C)$.

Όμως, $mod(QT(R))=mod(TTI(C))=mod(C)=mod(r)\Rightarrow QT(R)\cong r$, άρα η πρόταση ισχύει για ελάχιστους όρους.

Στην γενική περίπτωση, όπου η p είναι η διάζευξη $m\in\mathbb{N}^*$ ελάχιστων όρων και η q είναι η διάζευξη $l\in\mathbb{N}^*$ ελάχιστων όρων, έχουμε ότι:

$p=p_1\vee p_2\vee\ldots\vee p_m$, $q=q_1\vee q_2\vee\ldots\vee q_l$, όπου κάθε p_j, $j\in\{1,2,\ldots,m\}$ και κάθε q_j, $j\in\{1,2,\ldots,l\}$ είναι ελάχιστοι όροι.

Έστω k ο ελάχιστος ακέραιος για τον οποίο $mod(G^k(p)\wedge q)\neq\varnothing$.

Τότε έχουμε:

$mod(r)=mod(p\bullet^D q)=mod(G^k(p)\wedge q)=mod(G^k(p_1\vee p_2\vee\ldots\vee p_m)\wedge(q_1\vee q_2\vee\ldots\vee q_l))=$

$=mod(G^k(p_1)\vee G^k(p_2)\vee\ldots\vee G^k(p_m))\wedge(q_1\vee q_2\vee\ldots\vee q_l))=$

$$=\bigcup_{i=1,j=1}^{i=m,j=l} mod(G^k(p_i)\wedge q_j) \quad (1).$$

Στην παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι όλα τα p_i και q_j είναι ελάχιστοι όροι. Για κάθε αυθαίρετη επιλογή δεικτών $i\in\{1,2,\ldots,m\}$, $j\in\{1,2,\ldots,l\}$, μπορούμε να ορίσουμε τα σύνολα P^+,P^-,P^0,Q^+,Q^-,Q^0 όπως συνήθως για τους ελάχιστους όρους p_i, q_j αντίστοιχα, όπως και την ποσότητα:

$t=|(P^+\cap Q^-)\cup(P^-\cap Q^+)|\in\mathbb{N}^*$.

Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις ως προς την τιμή του t:

- $t<k$: Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι $mod(G^t(p_i)\wedge q_j)\neq\varnothing$, από το λήμμα A.7, άρα η ένωση: $\bigcup_{i=1,j=1}^{i=m,j=l} mod(G^t(p_i)\wedge q_j)\neq\varnothing$, που σημαίνει ότι $mod(G^t(p)\wedge q)\neq\varnothing$ για κάποιο $t<k$, άτοπο από τον ορισμό του k.
- $t>k$: Στην περίπτωση αυτή από το λήμμα A.7, ο t είναι ο ελάχιστος ακέραιος για τον οποίο η σχέση $mod(G^t(p_i)\wedge q_j)\neq\varnothing$ ισχύει, και αφού $t>k$ έπεται ότι: $mod(G^k(p_i)\wedge q_j)=\varnothing$.
- $t=k$: Στην περίπτωση αυτή, και πάλι από το λήμμα A.7, έπεται: $mod(G^k(p_i)\wedge q_j)=I_1\times I_2\times\ldots\times I_n$ όπου για όλα τα $d\in\{1,2,\ldots,n\}$:
  - $I_d=\{1\}$, ανν $d\in Q^+\cup(Q^0\cap P^+)$
  - $I_d=\{0\}$, ανν $d\in Q^-\cup(Q^0\cap P^-)$
  - $I_d=\{0,1\}$, ανν $d\in Q^0\cap P^0$

Θα συμβολίζουμε με T το σύνολο των ζευγών (i,j) για τα οποία η εξίσωση t=k ισχύει. Υπάρχει τουλάχιστον ένα τέτοιο ζεύγος, γιατί αν δεν υπήρχε τότε θα είχαμε: $\mathrm{mod}(G^k(p)\wedge q)=\varnothing$, άτοπο από τον ορισμό του k. Άρα $T\neq\varnothing$.

Από την (1) έπεται:

$$\mathrm{mod}(r)=\bigcup_{(i,j)\in T}\mathrm{mod}(G^k(p_i)\wedge q_j) \quad (2).$$

Για κάθε ζεύγος (i,j), ορίζουμε την ποσότητα t_{ij} όπως παραπάνω, και για όλα τα i,j ισχύει: $t_{ij}\geq k$. Αφού το σύνολο T περιέχει τα ζεύγη (i,j) για τα οποία $t_{ij}=k$, μπορούμε να συνάγουμε ότι:

$T=\{(i,j)|i\in\{1,2,\ldots,m\},j\in\{1,2,\ldots,l\},t_{ij}\leq t_{i'j'}$, για κάθε $i'\in\{1,2,\ldots,m\},j'\in\{1,2,\ldots,l\}\}$.

Από την άλλη είναι προφανές ότι:

$$P=TT(p)=\underset{i=1}{\overset{m}{\vee}}TT(p_i)=\underset{i=1}{\overset{m}{|}}TT(p_i) \text{ και:}$$

$$Q=2\cdot TT(q)=2\cdot\underset{j=1}{\overset{l}{\vee}}TT(q_j)=2\cdot\underset{j=1}{\overset{l}{|}}TT(q_j)=\underset{j=1}{\overset{l}{|}}(2\cdot TT(q_j)).$$

Από τον ορισμό της πράξης της ενημέρωσης είναι προφανές ότι:

$$R=P\bullet Q=(\underset{i=1}{\overset{m}{|}}TT(p_i))\bullet(\underset{j=1}{\overset{l}{|}}(2\cdot TT(q_j)))=\underset{i=1,j=1}{\overset{i=m,j=l}{|}}(TT(p_i)+2\cdot TT(q_j)) \quad (3).$$

Κάθε ένα από τα $TT(p_i)$, $2\cdot TT(q_j)$ είναι πίνακες με μία μόνο γραμμή, άρα η παραπάνω εξίσωση δίνει την έκφραση του R σαν παράθεση των γραμμών του.

Ας υποθέσουμε ότι $R=[r_{dh}]$, $d\in\{1,2,\ldots,m\cdot l\}$, $h\in\{1,2,\ldots,n\}$. Τότε:

$$RL(RE(R))=RL(RE(\begin{bmatrix}r_{11}&r_{12}&\ldots&r_{1n}\\r_{21}&r_{22}&\ldots&r_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\r_{m\cdot l1}&r_{m\cdot l2}&\ldots&r_{m\cdot \ln}\end{bmatrix}))=$$

$$=RL(\begin{bmatrix}RE_0(r_{11})&RE_0(r_{12})&\ldots&RE_0(r_{1n})\\RE_0(r_{21})&RE_0(r_{22})&\ldots&RE_0(r_{2n})\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\RE_0(r_{m\cdot l1})&RE_0(r_{m\cdot l2})&\ldots&RE_0(r_{m\cdot \ln})\end{bmatrix})=$$

$$=\underset{d=1}{\overset{m\cdot l}{|}}RL_0([RE_0(r_{d1})\quad RE_0(r_{d2})\quad\ldots\quad RE_0(r_{dn})]).$$

Από την σχέση αυτή συνάγεται ότι $RL(RE(R))\in\mathbb{R}^{(+)m\cdot l\times 1}$, και κάθε στοιχείο του πίνακα αυτού υπολογίζεται με την βοήθεια του λήμματος Α.8.

Ας επιλέξουμε αυθαίρετα ένα $d_0\in\{1,2,\ldots,m\cdot l\}$. Ορίζουμε επίσης:

$i_0=((d_0-1)\ \mathrm{div}\ m)+1$ και $j_0=((d_0-1)\bmod m)+1$ (4).

Με την χρήση της (3) επαληθεύεται εύκολα ότι η γραμμή d_0 του πίνακα R (την οποία συμβολίζουμε με $R^{(d_0)}$) ισούται με:

$$R^{(d_0)}=TT(p_{i_0})+2\cdot TT(q_{j_0}).$$

Επιπλέον, από το λήμμα Α.8: RL(RE($R^{(d_0)}$))=[n–$t_{i_0 j_0}$], όπου τα t_{ij} είναι όπως παραπάνω.

Συνεπώς:

$RL(RE(R)) = \overset{m\cdot l}{\underset{d=1}{|}} [n - t_{i(d)\,j(d)}]$, όπου i(d),j(d) οι δείκτες που σχετίζονται με τον d, όπως αυτοί καθορίζονται από τις σχέσεις (4). Έστω B′=RL(RE(R)).

Από τον ορισμό του LS έπεται ότι:

$LS(B')=\{h\in\{1,2,\ldots,m\cdot l\}:\forall h'\in\{1,2,\ldots,m\cdot l\}\ n-t_{i(h)j(h)}\geq n-t_{i(h')j(h')}\}=$

$=\{h\in\{1,2,\ldots,m\cdot l\}:\forall h'\in\{1,2,\ldots,m\cdot l\}\ t_{i(h)j(h)}\leq t_{i(h')j(h')}\}$.

Συγκρίνοντας το σύνολο T:

$T=\{(i,j)|i\in\{1,2,\ldots,m\},j\in\{1,2,\ldots,l\},t_{ij}\leq t_{i'j'}$, για κάθε $i'\in\{1,2,\ldots,m\},j'\in\{1,2,\ldots,l\}\}$,

με το σύνολο LS(B′) έπεται ότι:

$h\in LS(B')\Leftrightarrow(i(h),j(h))\in T$.

Άρα:

$C' = MS(R, LS(B')) = \underset{h\in LS(B')}{|} R^{(h)} = \underset{(i,j)\in T}{|} (TT(p_i) + 2\cdot TT(q_j))$ και:

$D = MN(C') = MN(\underset{(i,j)\in T}{|} (TT(p_i) + 2\cdot TT(q_j))) = \underset{(i,j)\in T}{|} MN(TT(p_i) + 2\cdot TT(q_j))$.

Τελικά:

$\mathrm{mod}(QT(R)) = \mathrm{mod}(TTI(D)) = \mathrm{mod}(D) = \mathrm{mod}(\underset{(i,j)\in T}{|} MN(TT(p_i) + 2\cdot TT(q_j))) =$

$= \mathrm{mod}(\underset{(i,j)\in T}{\vee} MN(TT(p_i) + 2\cdot TT(q_j))) = \bigcup_{(i,j)\in T} \mathrm{mod}(MN(TT(p_i) + 2\cdot TT(q_j)))$ (5).

Ας επιλέξουμε ένα τυχαίο ζεύγος $(i,j)\in T$, και έστω $A_P=TT(p_i)$, $A_Q=2\cdot TT(q_j)$.

Τόσο ο p_i όσο και ο q_j είναι ελάχιστοι όροι, και έστω $s=p_i\bullet^D q_j$. Τότε:

$\mathrm{mod}(s)=\mathrm{mod}(G^{k'}(p_i)\wedge q_j)$, για το ελάχιστο $k'\in\mathbb{N}^*$ για το οποίο $\mathrm{mod}(G^{k'}(p_i)\wedge q_j)\neq\varnothing$. Από τον ορισμό του T, έπεται ότι $k'=t_{ij}=k$.

Δοθέντος ότι $A_P,A_Q\in\mathbb{C}^{(+)1\times n}$, έχουμε: $QT(A_P\bullet A_Q)=TTI(MN(A_P\bullet A_Q))$.

Επιπλέον, η πρόταση έχει ήδη αποδειχθεί για ελάχιστους όρους, άρα:

$\mathrm{mod}(s)=\mathrm{mod}(QT(A_P\bullet A_Q))=\mathrm{mod}(TTI(MN(A_P\bullet A_Q)))=\mathrm{mod}(MN(TT(p_i)+2\cdot TT(q_j)))\Rightarrow$

$\Rightarrow\mathrm{mod}(G^k(p_i)\wedge q_j)=\mathrm{mod}(MN(TT(p_i)+2\cdot TT(q_j)))$.

Η παραπάνω ισότητα ισχύει για κάθε $(i,j)\in T$, άρα:

$(2)\Rightarrow \mathrm{mod}(r) = \bigcup_{(i,j)\in T} \mathrm{mod}(G^k(p_i)\wedge q_j) =$

$= \bigcup_{(i,j)\in T} \mathrm{mod}(MN(TT(p_i) + 2\cdot TT(q_j))) = \mathrm{mod}(QT(R))$ από την (5).

Άρα τελικά: $r\cong QT(R)$, και η απόδειξη είναι πλήρης.

Πρόταση 6.2

Έστω ο μετασχηματισμός TT όπως ορίζεται στο παράρτημα Α, ορισμός Α.4, και δύο ικανοποιήσιμες προτάσεις p, $q \in L^*$ σε DNF. Τότε η πρόταση $p \wedge q$ είναι ικανοποιήσιμη αν και μόνο αν ο πίνακας $TT(p)\cdot(TT(q)^T)$ περιέχει πραγματικό αριθμό, δηλαδή στοιχείο $z \in \mathbb{C}$ για το οποίο Im(z)=0.

Απόδειξη

Έστω αρχικά ότι οι p, q είναι ελάχιστοι όροι. Τότε, ορίζουμε τα σύνολα P^+, P^-, P^0, Q^+, Q^-, Q^0, όπως συνήθως (λήμμα Α.6), οπότε από το ίδιο λήμμα έχουμε ότι:

$$P = TT(p) = \sum_{j\in P^+} A_j + \sum_{j\in P^-} A_j(i),\ Q = TT(q) = \sum_{j\in Q^+} A_j + \sum_{j\in Q^-} A_j(i).$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι:

$Q^T = (\sum_{j\in Q^+} A_j + \sum_{j\in Q^-} A_j(i))^T = \sum_{j\in Q^+} A_j^T + \sum_{j\in Q^-} (A_j(i))^T$ και επιπλέον είναι προφανές ότι $P\cdot Q^T \in \mathbb{C}^{1\times 1}$, και έστω ότι $P\cdot Q^T=[z]$, $z\in\mathbb{C}$.

Επομένως:

$$[z] = (\sum_{j\in P^+} A_j + \sum_{j\in P^-} A_j(i))\cdot(\sum_{j\in Q^+} A_j^T + \sum_{j\in Q^-} (A_j(i))^T) =$$

$$= \sum_{j\in P^+, h\in Q^+} (A_j \cdot A_h^T) + \sum_{j\in P^+, h\in Q^-} (A_j \cdot (A_h(i))^T) + \sum_{j\in P^-, h\in Q^+} (A_j(i)\cdot A_h^T) + \sum_{j\in P^-, h\in Q^-} (A_j(i)\cdot (A_h(i))^T) \quad (1).$$

Όμως για κάθε ζεύγος δεικτών (j,h) με $j\neq h$, επαληθεύεται εύκολα ότι ισχύουν οι εξής σχέσεις (ανεξαρτήτως του συνόλου στο οποίο ανήκουν οι δείκτες):

$$A_j \cdot A_h^T = A_j \cdot (A_h(i))^T = A_j(i)\cdot A_h^T = A_j(i)\cdot (A_h(i))^T = [0] \quad (2).$$

Άρα η (1) λόγω της (2) γίνεται:

$$[z] = [0] + \sum_{j\in P^+\cap Q^+} (A_j \cdot A_j^T) + \sum_{j\in P^+\cap Q^-} (A_j \cdot (A_j(i))^T) +$$
$$+ \sum_{j\in P^-\cap Q^+} (A_j(i)\cdot A_j^T) + \sum_{j\in P^-\cap Q^-} (A_j(i)\cdot (A_j(i))^T) \quad (3).$$

Επίσης, επαληθεύεται εύκολα ότι:

$$A_j \cdot A_j^T = [1],\ A_j \cdot (A_j(i))^T = [i],$$

$$A_j(i)\cdot A_j^T = [i],\ A_j(i)\cdot (A_h(i))^T = [-1]. \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (4), σε συνδυασμό με την (3) είναι προφανές ότι:

$Im(z)=|(P^+\cap Q^-)\cup(P^-\cap Q^+)|=|P^+\cap Q^-|+|P^-\cap Q^+|$, αφού τα σύνολα $(P^+\cap Q^-)$ και $(P^-\cap Q^+)$ είναι ξένα μεταξύ τους: $(P^+\cap Q^-)\cap(P^-\cap Q^+)=(P^+\cap P^-)\cap(Q^-\cap Q^+)=\varnothing$.

Ο όρος $p\wedge q \in L^*$ είναι ελάχιστος όρος, πιθανά ικανοποιήσιμος, και είναι προφανές ότι είναι ικανοποιήσιμος αν και μόνο αν δεν υπάρχει άτομο το οποίο να εμφανίζεται ως κατάφαση στον p και ως άρνηση στον q και επιπλέον δεν υπάρχει άτομο το οποίο να εμφανίζεται ως άρνηση στον p και ως κατάφαση στον q. Ισοδυνάμως, από τον ορισμό των P^+,P^-,Q^-,Q^+ έχουμε ότι $p\wedge q$: ικανοποιήσιμη αν και μόνο αν $P^+\cap Q^-=\varnothing$ και

επιπλέον $P^- \cap Q^+ = \varnothing$ το οποίο ισοδυνάμως σημαίνει ότι $|P^+ \cap Q^-| = |P^- \cap Q^+| = 0$, ή ισοδυνάμως από την παραπάνω σχέση: Im(z)=0, και η απόδειξη είναι πλήρης για p,q: ελάχιστους όρους.

Στην γενική περίπτωση, οι p, q είναι μία διάζευξη ελάχιστων όρων, και έστω ότι $p=p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_m$, $q=q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_l$, όπου p_j: ελάχιστος όρος για $j \in \{1,2,\ldots,m\}$ και q_h: ελάχιστος όρος για $h \in \{1,2,\ldots,l\}$, $m,l \in \mathbb{N}^*$. Άρα ισχύει η σχέση:

$p \wedge q = \bigvee_{j=1,h=1}^{j=m,h=l} (p_j \wedge q_h)$, συνεπώς η πρόταση $p \wedge q$ είναι ικανοποιήσιμη αν και μόνο αν υπάρχει ζεύγος δεικτών (j,h), $j \in \{1,2,\ldots,m\}$, $h \in \{1,2,\ldots,l\}$ ώστε $p_j \wedge q_h$: ικανοποιήσιμη.

Όμως ισχύει ότι:

$TT(p) = TT(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_m) = \underset{j=1}{\overset{m}{\vee}} TT(p_j) = \underset{j=1}{\overset{m}{|}} TT(p_j)$ και ομοίως:

$TT(q) = TT(q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_l) = \underset{h=1}{\overset{l}{\vee}} TT(q_h) = \underset{h=1}{\overset{l}{|}} TT(q_h)$.

Επομένως:

$R = TT(p) \cdot (TT(q))^T = (\underset{j=1}{\overset{m}{|}} TT(p_j)) \cdot (\underset{h=1}{\overset{l}{|}} TT(q_h))^T$.

Εξ ορισμού έχουμε ότι: $TT(p) \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $TT(q) \in \mathbb{C}^{l \times n} \Rightarrow (TT(q))^T \in \mathbb{C}^{n \times l}$, επομένως από τον ορισμό του γινομένου πινάκων, έχουμε ότι $R \in \mathbb{C}^{m \times l}$, και έστω ότι $R=[z_{jh}]$, $j \in \{1,2,\ldots,m\}$, $h \in \{1,2,\ldots,l\}$.

Και πάλι από τον ορισμό του γινομένου πινάκων, είναι προφανές ότι για κάθε $j \in \{1,2,\ldots,m\}$, $h \in \{1,2,\ldots,l\}$, ισχύει ότι:

$TT(p_j) \cdot (TT(q_h))^T \in \mathbb{C}^{1 \times 1}$, και έστω ότι $[w_{jh}] = TT(p_j) \cdot (TT(q_h))^T$, $w_{jh} \in \mathbb{C}$.

Λόγω του ότι η πρόταση ισχύει για ελάχιστους όρους έχουμε ότι ο όρος $p_j \wedge q_h$ είναι ικανοποιήσιμος αν και μόνο αν $Im(w_{jh})=0$.

Με απλή εφαρμογή του ορισμού του γινομένου πινάκων και του ορισμού της παράθεσης (ορισμός 4.1), καθώς και από τον ορισμό του πίνακα R, προκύπτει ότι για κάθε $j \in \{1,2,\ldots,m\}$, $h \in \{1,2,\ldots,l\}$, ισχύει ότι $z_{jh}=w_{jh}$, το οποίο σημαίνει ότι ο όρος $p_j \wedge q_h$ είναι ικανοποιήσιμος αν και μόνο αν $Im(z_{jh})=0$.

Άρα τελικά, η πρόταση $p \wedge q$ είναι ικανοποιήσιμη αν και μόνο αν υπάρχει στοιχείο του πίνακα $R=TT(p) \cdot (TT(q))^T$, έστω z, για το οποίο Im(z)=0, και η απόδειξη είναι πλήρης.

Η πρόταση αυτή έχει κάποια ενδιαφέροντα πορίσματα τα οποία σκιαγραφήσαμε στο κεφάλαιο 6 της αναφοράς. Εδώ θα δούμε την τυπική τους διατύπωση και το πώς αποδεικνύονται:

Πόρισμα Α.1

Έστω ερμηνεία $I=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in I(n)$ και $A\in\mathbb{C}^{1\times n}$ ο αντίστοιχός της πίνακας-ερμηνεία: $A=\sum_{j=1}^{n} A_j(x_j+(1-x_j)\cdot i)$. Έστω επίσης μία ικανοποιήσιμη λογική πρόταση $p\in L^*$ σε DNF, και $P=TT(p)$ ο πίνακας που προκύπτει χρησιμοποιώντας τον κανονικό μετασχηματισμό πινάκων (ορισμός Α.4). Τότε η ερμηνεία I ικανοποιεί την λογική πρόταση p ($I\in mod(p)$) αν και μόνο αν ο πίνακας $P\cdot A^T$ περιέχει στοιχείο $z\in\mathbb{C}$ για το οποίο $Im(z)=0$.

Απόδειξη

Ορίζω τα σύνολα $Q^+=\{j\in\{1,2,\ldots,n\}:x_j=1\}$, $Q^-=\{j\in\{1,2,\ldots,n\}:x_j=0\}$, $Q^0=\varnothing$, και την λογική πρόταση:

$q=(\underset{j\in Q^+}{\wedge} a_j)\wedge(\underset{j\in Q^-}{\wedge}(\neg a_j))$.

Έστω $z_j=x_j+(1-x_j)\cdot i$. Επειδή $x_j\in\{0,1\}$ έπεται ότι:

- $z_j=x_j+(1-x_j)\cdot i=1\Leftrightarrow x_j=1\Leftrightarrow j\in Q^+$
- $z_j=x_j+(1-x_j)\cdot i=i\Leftrightarrow x_j=0\Leftrightarrow j\in Q^-$

Από τον ορισμό των γενικευμένων k-ατόμων (ορισμός 4.3) είναι προφανές ότι ισχύει: $A=[z_1\ z_2\ \ldots\ z_n]$.

Επίσης, από τον αλγοριθμικό ορισμό του κανονικού μετασχηματισμού TT και τις παραπάνω ισοδυναμίες, έπεται ότι $TT(q)=A$.

Από την πρόταση 4.5, και το πόρισμα 4.4, σε συνδυασμό με τις τιμές των στοιχείων z_j, $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ έχουμε ότι $mod(A)=I_1\times I_2\times\ldots\times I_n$, όπου για κάθε $j\in\{1,2,\ldots,n\}$:

- $I_j=\{0\}\Leftrightarrow z_j=i\Leftrightarrow x_j=0$
- $I_j=\{1\}\Leftrightarrow z_j=1\Leftrightarrow x_j=1$

το οποίο πρακτικά σημαίνει ότι η μοναδική ερμηνεία που ικανοποιεί τον πίνακα Α είναι η I, δηλαδή $mod(A)=\{I\}$. Άρα $mod(q)=mod(TT(q))=mod(A)=\{I\}$.

Η ερμηνεία I ικανοποιεί την λογική πρόταση p αν και μόνο αν $I\in mod(p)\Leftrightarrow\{I\}\cap mod(p)=\{I\}\Leftrightarrow mod(q)\cap mod(p)=\{I\}$.

Επειδή $mod(q)=\{I\}$, έχουμε ότι $mod(q)\cap mod(p)\subseteq\{I\}$, που σημαίνει τελικά ότι: $mod(q)\cap mod(p)\neq\varnothing\Leftrightarrow mod(q)\cap mod(p)=\{I\}$, άρα τελικά από τις παραπάνω ισοδυναμίες παίρνουμε ότι η ερμηνεία I ικανοποιεί την λογική πρόταση p αν και μόνο αν $mod(q)\cap mod(p)\neq\varnothing\Leftrightarrow mod(q\wedge p)\neq\varnothing$, ή ισοδύναμα αν $q\wedge p$: ικανοποιήσιμη έκφραση. Από την πρόταση 6.1 παίρνουμε ισοδυνάμως, ότι $I\in mod(p)$ αν και μόνο αν ο πίνακας $TT(p)\cdot(TT(q))^T=TT(p)\cdot A^T=P\cdot A^T$ περιέχει πραγματικό αριθμό, δηλαδή στοιχείο $z\in\mathbb{C}$, για το οποίο $Im(z)=0$, και η απόδειξη είναι πλήρης.

Η απόδειξη του παρακάτω πορίσματος αποτελεί μέρος της απόδειξης της πρότασης 6.2. Επαναλαμβάνεται όμως για λόγους πληρότητας:

Πόρισμα Α.2

Έστω ο μετασχηματισμός TT όπως ορίζεται στο παράρτημα Α, ορισμός Α.4, και δύο ικανοποιήσιμες προτάσεις p, $q\in L^*$ σε DNF, για τις οποίες ισχύει ότι $p=p_1\wedge p_2\wedge\ldots\wedge p_m$, $q=q_1\wedge q_2\wedge\ldots\wedge q_l$, $m,l\in\mathbb{N}^*$, όπου οι προτάσεις p_j, $j\in\{1,2,\ldots,m\}$ και q_h, $h\in\{1,2,\ldots,l\}$ είναι ελάχιστοι όροι. Έστω επίσης ο πίνακας $R=TT(p)\cdot(TT(q)^T)\in\mathbb{C}^{m\times l}$. Τότε η έκφραση $p_j\wedge q_h$, για $j\in\{1,2,\ldots,m\}$,$h\in\{1,2,\ldots,l\}$ είναι ικανοποιήσιμη αν και μόνο αν για το στοιχείο που βρίσκεται στην j γραμμή και h στήλη του R, έστω $z_{jh}\in\mathbb{C}$, ισχύει ότι: $Im(z_{jh})=0$.

Απόδειξη

Ισχύει ότι:

$$TT(p)=TT(p_1\vee p_2\vee\ldots\vee p_m)=\underset{j=1}{\overset{m}{\vee}}TT(p_j)=\underset{j=1}{\overset{m}{|}}TT(p_j)$$ και ομοίως:

$$TT(q)=TT(q_1\vee q_2\vee\ldots\vee q_l)=\underset{h=1}{\overset{l}{\vee}}TT(q_h)=\underset{h=1}{\overset{l}{|}}TT(q_h).$$

Επομένως:

$$R=TT(p)\cdot(TT(q))^T=(\underset{j=1}{\overset{m}{|}}TT(p_j))\cdot(\underset{h=1}{\overset{l}{|}}TT(q_h))^T.$$

Εξ ορισμού έχουμε ότι: $TT(p)\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $TT(q)\in\mathbb{C}^{l\times n}\Rightarrow(TT(q))^T\in\mathbb{C}^{n\times l}$, επομένως από τον ορισμό του γινομένου πινάκων, έχουμε ότι $R\in\mathbb{C}^{m\times l}$, και έστω ότι $R=[z_{jh}]$, $j\in\{1,2,\ldots,m\}$, $h\in\{1,2,\ldots,l\}$.

Και πάλι από τον ορισμό του γινομένου πινάκων, είναι προφανές ότι για κάθε $j\in\{1,2,\ldots,m\}$, $h\in\{1,2,\ldots,l\}$, ισχύει ότι:

$TT(p_j)\cdot(TT(q_h))^T\in\mathbb{C}^{1\times1}$, και έστω ότι $[w_{jh}]=TT(p_j)\cdot(TT(q_h))^T$, $w_{jh}\in\mathbb{C}$.

Λόγω της πρότασης 6.2, έχουμε ότι ο όρος $p_j\wedge q_h$ είναι ικανοποιήσιμος αν και μόνο αν $Im(w_{jh})=0$.

Με απλή εφαρμογή του ορισμού του γινομένου πινάκων και του ορισμού της παράθεσης (ορισμός 4.1), καθώς και από τον ορισμό του πίνακα R, προκύπτει ότι για κάθε $j\in\{1,2,\ldots,m\}$, $h\in\{1,2,\ldots,l\}$, ισχύει ότι $z_{jh}=w_{jh}$, το οποίο σημαίνει ότι ο όρος $p_j\wedge q_h$ είναι ικανοποιήσιμος αν και μόνο αν $Im(z_{jh})=0$.

Παράρτημα Β

Β.1 Εισαγωγή

Στο παράρτημα αυτό θα μελετήσουμε κάποιες περιπτώσεις ενημερώσεων με την εφαρμογή της μεθόδου που περιγράψαμε, για διάφορες παραμέτρους. Έτσι, θα μπορέσουμε να πάρουμε μία πρώτη γεύση από τις επιδράσεις των διαφορετικών παραμέτρων στο αποτέλεσμα μιας ενημέρωσης. Σε όλα τα παραδείγματα υποθέτουμε γλώσσα 3 ατόμων, τα οποία θα συμβολίζουμε με: α_1, α_2, α_3.

Β.2 Παράδειγμα Ενημέρωσης με Θετική και Αρνητική Γνώση

Στο πρώτο παράδειγμα θα δούμε μία περίπτωση ενημέρωσης με πίνακα ο οποίος περιέχει ένα πιθανό κόσμο με θετική και ένα πιθανό κόσμο με αρνητική γνώση:

$$K = \begin{bmatrix} 3 & 2i & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -i \end{bmatrix}$$

Η βάση K περιέχει την πληροφορία ότι υπάρχουν δύο πιθανοί κόσμοι, και ισχύει ότι: $TTI(K)=(\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2)\wedge\alpha_3)\vee(\alpha_1\wedge T\wedge\alpha_3)\equiv(\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2)\wedge\alpha_3)\vee(\alpha_1\wedge\alpha_3)\equiv\alpha_1\wedge\alpha_3$.

Δηλαδή, με βάση την πληροφορία του K, υπάρχουν οι πιθανοί κόσμοι $\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2)\wedge\alpha_3$ και $\alpha_1\wedge\alpha_3$.

Η ενημέρωση M, είναι κάπως «περίεργη» υπό την έννοια ότι περιέχει δύο πιθανούς κόσμους, ο ένας εκ των οποίων μας δίνει την (θετική) πληροφορία $\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3$, ενώ ο δεύτερος κάποια αρνητική πληροφορία. Τέτοιου είδους ενημερώσεις δεν είναι δυνατό να γίνουν στα κλασικά μοντέλα. Για να βρούμε την πραγματική πληροφορία της δεύτερης γραμμής του M, έστω $M^{(2)}$, θα υπολογίσουμε την ποσότητα:

$TTI(-M^{(2)})=\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge(\neg\alpha_3)$. Έτσι, ο δεύτερος πιθανός κόσμος του M μας δίνει την πληροφορία ότι δεν ισχύει η πρόταση $\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge(\neg\alpha_3)$, δηλαδή απαιτεί την αφαίρεση της πρότασης αυτής από την βάση.

Παρόλα αυτά ισχύει: $TTI(M)=(\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3)\vee((\neg\alpha_1)\wedge(\neg\alpha_2)\wedge\alpha_3)$. Παρατηρήστε ότι για το δεύτερο μέλος της διάζευξης (δεύτερος πιθανός κόσμος) η πληροφορία που μας δίνει η TTI είναι ότι ισχύει η πρόταση $((\neg\alpha_1)\wedge(\neg\alpha_2)\wedge\alpha_3)$. Αυτή η πληροφορία όπως έχουμε δει (και έχει παρατηρηθεί και στην βιβλιογραφία) δεν είναι ισοδύναμη

με την αφαίρεση της πληροφορίας $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge (\neg \alpha_3)$. Συνεπώς, η έκφραση TTI(M) δεν δίνει την σωστή σημασιολογία της ενημέρωσης M.

Το αποτέλεσμα της ενημέρωσης μεταξύ των πινάκων K, M είναι ο πίνακας:

$$K' = K \bullet M = \begin{bmatrix} 3 & 2i & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2+2i & 2 \\ 2 & -2+2i & 1-i \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 2-i \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας K′ περιέχει μόνο μία αντιφατική γραμμή, την πρώτη. Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις RE, RL και LS ορίζονται όπως στις προτάσεις A.7, A.8 (για w=1), A.9, αντίστοιχα. Τότε:

$$B = RE(K') = RE(\begin{bmatrix} 4 & 2+2i & 2 \\ 2 & -2+2i & 1-i \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 2-i \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = RL(B) = RL(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$LS(C) = \{3\}$,

$D = MS(K', LS(C)) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$,

TTI(MN(D))=$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$.

Στον παραπάνω πίνακα C μπορούμε να παρατηρήσουμε κάποιο πρόβλημα: η μη αντιφατική γραμμή #2 είχε μικρότερη αξιοπιστία από την αντιφατική γραμμή #1. Επίσης, στοιχεία όπως το $-2+2i \in \mathbb{C}_-$, έδιναν αξιοπιστίες $RE_0(-2+2i)=0$, κάτι το οποίο δεν ακούγεται και πολύ λογικό. Ο λόγος αυτών των αποτελεσμάτων είναι το γεγονός ότι οι συναρτήσεις αξιοπιστίας RE, RL σχεδιάστηκαν για να εξομοιωθεί ο αλγόριθμος του Dalal, ο οποίος ασχολείται μόνο με θετική γνώση, δηλαδή με αξιοπιστίες εκφρασμένες με στοιχεία του συνόλου $\mathbb{C}^{(+)}$. Όταν στους διάφορους πίνακες εισέρχονται στοιχεία του συνόλου $\mathbb{C} \backslash \mathbb{C}^{(+)}$ βλέπουμε ότι οι συναρτήσεις αυτές γίνονται ακατάλληλες για τον υπολογισμό αξιοπιστίας (παρόλο που ανήκουν στις σχετικές κλάσεις).

Πάντως, έστω και με τις συγκεκριμένες παραμέτρους, ο αλγόριθμός μας επέστρεψε μία λογική έκφραση η οποία ικανοποιείται από την ερμηνεία I=(1,1,1) μόνο και ισχύει: $I \in mod(K) \cap mod(M)$.

Το σωστότερο αποτέλεσμα θα έπρεπε να συμπεριλαμβάνει την ερμηνεία I, αλλά θα έπρεπε επιπλέον να περιέχει την πληροφορία των μη αντιφατικών γραμμών

#2 και #4. Οι γραμμές αυτές προέκυψαν από την δεύτερη γραμμή του M, δηλαδή αντιστοιχούν στην αφαίρεση του $-M^{(2)}$ από τον πίνακα K, ή αλλιώς στην ενημέρωση του K με τον $M^{(2)}$. Λόγω του ότι ο $M^{(2)}$ περιέχει αρνητικά στοιχεία οι γραμμές αυτές περιέχουν στοιχεία του συνόλου $\mathbb{C}\backslash\mathbb{C}^{(+)}$, κάτι το οποίο σε συνδυασμό με την λανθασμένο ορισμό των παραμέτρων RE, RL προκάλεσε το παραπάνω πρόβλημα.

Αν κατά τον μετασχηματισμό QT σχεδιάσουμε την συνάρτηση LS ώστε να επιλέγει τουλάχιστον τις μη αντιφατικές γραμμές θα πάρουμε την λογική πρόταση:

$QT(K')=(\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2)\wedge\alpha_3)\vee(\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3)\vee(\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2)\wedge\alpha_3)\cong$

$\cong(\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2)\wedge\alpha_3)\vee(\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3)\cong\alpha_1\wedge\alpha_3$.

Παρατηρήστε ότι όλοι οι πιθανοί κόσμοι του K συμφωνούν ως προς την αλήθεια των α_1, α_3. Για το M, ο πρώτος πιθανός κόσμος συμφωνεί επίσης ως προς την αλήθεια των ατόμων αυτών, ενώ ο δεύτερος πιθανός κόσμος μας προτρέπει να μην πιστεύουμε στην αλήθεια του α_1 και να μην πιστεύουμε στο ψεύδος του α_3. Άρα λοιπόν, όλοι οι πιθανοί κόσμοι συμφωνούν ως προς την αλήθεια του α_3. Για το α_1 η (αρνητική) αξιοπιστία του δεύτερου πιθανού κόσμου του M είναι πολύ μικρή σε σχέση με τις αντίστοιχες αξιοπιστίες του K ώστε να αλλάξει κάτι.

Τέλος, για το άτομο α_2, η γνώση είναι αρκετά διφορούμενη. Επειδή υπάρχει συνδυασμός μη αντιφατικών κόσμων ο οποίος να μας δίνει γνώση υπέρ της κατάφασης του α_2 (κόσμοι $K^{(2)}$, $M^{(1)}$), και υπάρχει και συνδυασμός μη αντιφατικών κόσμων ο οποίος να μας δίνει γνώση υπέρ της άρνησης του α_2 (κόσμοι $K^{(1)}$, $M^{(2)}$) είμαστε υποχρεωμένοι, αφού δεχόμαστε κάθε μη αντιφατική πληροφορία, να δεχτούμε τόσο την περίπτωση α_2=T, όσο και την περίπτωση $\neg\alpha_2$=T$\Leftrightarrow\alpha_2$=F. Με βάση τα παραπάνω, προκύπτει η γνώση $\alpha_1\wedge\alpha_3$.

Αν είχαμε χρησιμοποιήσει την συνάρτηση αξιοπιστίας στοιχείου της πρότασης A.12, και τις συναρτήσεις αξιοπιστίας γραμμής και επιλογής γραμμών των προτάσεων A.8 (για w=1), A.9 αντίστοιχα, θα είχαμε:

$$B = RE(K') = RE(\begin{bmatrix} 4 & 2+2i & 2 \\ 2 & -2+2i & 1-i \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 2-i \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C = RL(B) = RL(\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix},$$

$$LS(C) = \{2,3\},$$

$$D = MS(K', LS(C)) = \begin{bmatrix} 2 & -2+2i & 1-i \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$TTI(MN(D))=(\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2)\wedge\alpha_3)\vee(\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3)\cong\alpha_1\wedge\alpha_3$.

Παρατηρούμε δηλαδή ότι, παρόλο που επιλέχθηκαν διαφορετικές γραμμές, το αποτέλεσμα της εφαρμογής του QT είναι το ίδιο σε σχέση με την παραπάνω περίπτωση, άρα ισχύουν τα ίδια σχόλια. Επίσης, παρατηρούμε σχετικά με την αξιοπιστία γραμμών ότι η αξιοπιστία των γραμμών #1 και #4 είναι ίδια παρά το γεγονός ότι η #1 είναι αντιφατική, σε αντίθεση με την #4. Αυτό οφείλεται στην υψηλή αξιοπιστία των μη αντιφατικών στοιχείων της #1, σε αντίθεση με την #4, της οποίας όλα τα στοιχεία έχουν μικρό δείκτη αξιοπιστίας, άρα και μικρή αξιοπιστία στοιχείου.

B.3 Παράδειγμα Παραμετροποίησης του Δείκτη RF

Σαν μία δεύτερη περίπτωση, θα μελετήσουμε το παράδειγμα που χρησιμοποιήσαμε για να δείξουμε την διαφορά μεταξύ διορθώσεων και αναθεωρήσεων. Εκεί είχαμε ως βάση την λογική πρόταση $\psi=(\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2))\vee((\neg\alpha_1)\wedge\alpha_2)\cong\alpha_1\leftrightarrow(\neg\alpha_2)\cong(\neg\alpha_1)\leftrightarrow\alpha_2$, ενώ η ενημέρωση ήταν η $\mu=\alpha_1$. Οι αντίστοιχοι πίνακες, όπως διαμορφώνονται με την εφαρμογή του κανονικού μετασχηματισμού TT είναι:

$$K=\begin{bmatrix}1 & i & 0\\ i & 1 & 0\end{bmatrix}, M=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Στους πίνακες αυτούς χρησιμοποιήσαμε τρεις στήλες, διότι είπαμε ότι αναφερόμαστε σε γλώσσα 3 ατόμων. Η ύπαρξη του τρίτου ατόμου δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα, αφού η σχετική γνώση είναι 0 σε όλες τις περιπτώσεις. Ως προς τον δείκτη αξιοπιστίας των ατόμων των παραπάνω πινάκων, θα χρησιμοποιήσουμε κάποια παραμετροποίηση, ώστε να δούμε τις συνέπειες που έχει η αλλαγή του δείκτη RF στο αποτέλεσμα τις ενημέρωσης. Έτσι, ας υποθέσουμε ότι:

$$K=\begin{bmatrix}x & x\cdot i & 0\\ y\cdot i & y & 0\end{bmatrix}, M=\begin{bmatrix}z-z'\cdot i & 0 & 0\end{bmatrix},$$

όπου οι αριθμοί $x,y,z,z'\in\mathbb{R}$, και επιπλέον $x>0$, $y>0$, $z>0$, $z'>0$, $|z|+|z'|>0$. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις, ανεξάρτητα από τις τιμές των παραμέτρων ισχύει:

$TTI(K)=(\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2)\wedge T)\vee((\neg\alpha_1)\wedge\alpha_2\wedge T)\cong(\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2))\vee((\neg\alpha_1)\wedge\alpha_2)\cong\alpha_1\leftrightarrow(\neg\alpha_2)\cong(\neg\alpha_1)\leftrightarrow\alpha_2$

$TTI(M)=(\alpha_1\wedge T\wedge T)\cong\alpha_1$

Η ενημερωμένη βάση θα έχει την μορφή:

$$K'=K\bullet M=\begin{bmatrix}x & x\cdot i & 0\\ y\cdot i & y & 0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}z-z'\cdot i & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(x+z)-z'\cdot i & x\cdot i & 0\\ z+(y-z')\cdot i & y & 0\end{bmatrix}$$

Στα επόμενα, θα συμβολίζουμε με L_1 την πρώτη και με L_2 την δεύτερη γραμμή του πίνακα K'. Θα χρησιμοποιήσουμε για συνάρτηση αξιοπιστίας στοιχείου την συνάρτηση της πρότασης Α.12, συνάρτηση αξιοπιστίας γραμμής την συνάρτηση της

Α.8 (για διάφορες τιμές της παραμέτρου w) και συνάρτηση επιλογής γραμμών την συνάρτηση της πρότασης Α.9.

Με βάση τις παραπάνω συναρτήσεις, έχουμε:

$r_{11}=RE_0((x+z)–z'i)=|(x+z)+z'|=|x+z+z'|=x+z+z'$

$r_{12}=RE_0(xi)=|x|=x$

$r_{13}=RE_0(0)=0$

$r_{21}=RE_0(z+(y–z')i)=|z–(y–z')|=|z+z'–y|$

$r_{22}=RE_0(y)=|y|=y$

$r_{23}=RE_0(0)=0$

Για τις συναρτήσεις αξιοπιστίας γραμμής έχουμε:

$R_1=(x+z+z')^w+x^w+0^w=(x+z+z')^w+x^w$

$R_2=|z+z'–y|^w+y^w+0^w=|z+z'–y|^w+y^w$

Είναι προφανές ότι ανάλογα με τις σχετικές τιμές των μεταβλητών x, y, z, z′ μπορεί να ισχύει είτε $R_1>R_2$, είτε $R_1<R_2$, είτε $R_1=R_2$. Επίσης, για την αρχική βάση (K) επαληθεύεται εύκολα ότι οι αξιοπιστίες των γραμμών της είναι $2\cdot x^w$, $2\cdot y^w$ για την πρώτη και δεύτερη γραμμή αντίστοιχα. Συνεπώς, η σχετική της λογική πρόταση (με χρήση του μετασχηματισμού QT), συναρτήσει των x, y δίνεται από τον παρακάτω πίνακα (ανεξαρτήτως της τιμής της παραμέτρου w):

	x>y	x=y	x<y
QT(K)	$\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2)$	$(\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2))\vee((\neg\alpha_1)\wedge\alpha_2)$	$(\neg\alpha_1)\wedge\alpha_2$

Ας πάρουμε αρχικά την περίπτωση κατά την οποία η γνώση της βάσης έχει την μορφή περιορισμού ακεραιότητας και η παράμετρος w=1. Σε αυτή την περίπτωση η πρόταση: $(\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2))\vee((\neg\alpha_1)\wedge\alpha_2)\equiv\alpha_1\leftrightarrow(\neg\alpha_2)$, δείχνει έναν περιορισμό της βάσης μας ότι δηλαδή τα α_1 και α_2 δεν μπορούν να έχουν την ίδια αληθοτιμή. Έστω λοιπόν ότι x=y, και επιπλέον τα x, y είναι μεγάλοι αριθμοί, δηλαδή x=y>>z, x=y>>z′. Τότε:

$R_1=x+z+z'+x=2\cdot x+z+z'$

$R_2=|z+z'–y|+y=y–z–z'+y=2\cdot y–z–z'=2\cdot x–z–z'$

Τότε, είναι σαφές ότι $R_1>R_2$, αλλά επειδή x>>z, x>>z′, έπεται ότι $R_1\approx R_2$. Λόγω του ορισμού της LS, το γεγονός ότι $R_1\approx R_2$ μας είναι αδιάφορο – το μόνο που μετράει είναι το γεγονός ότι $R_1>R_2$. Αν είχαμε έναν πιο «ευέλικτο» ορισμό για την LS θα επιλέγαμε και τις δύο γραμμές, στην προκειμένη περίπτωση πάντως το σύνολο S που επιστρέφει η συνάρτηση LS είναι το S={1}. Εφαρμόζοντας κατά τα γνωστά το υπόλοιπο του μετασχηματισμού QT, θα προκύψει τελικά ότι:

$QT(K')=\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2)$.

Το αποτέλεσμα ερμηνεύεται ως εξής: λόγω του ορισμού της LS μας ενδιαφέρουν μόνο οι απολύτως πιο αξιόπιστοι πιθανοί κόσμοι. Έτσι, δεδομένου ότι ο

κόσμος της γραμμής L_1 είναι μη αντιφατικός, είναι προτιμητέος σε σχέση με τον αντιφατικό κόσμο της L_2, παρόλο που τελικά οι αξιοπιστίες τους είναι «κοντά». Με άλλα λόγια, λόγω του γεγονότος ότι ο μοναδικός πιθανός κόσμος του M αντιφάσκει με τον L_2, θα προτιμηθεί ο L_1. Αυτό συμβαίνει παρά το γεγονός ότι πρακτικά η γνώση του M είναι αμελητέα ως προς την γνώση του K, άρα θα μπορούσε κάλλιστα να μην έχει επηρρεάσει την βάση, για κάποια άλλη επιλογή της παραμέτρου LS.

Αναιρώντας τον περιορισμό x=y, αλλά κρατώντας τις σχέσεις x>>z, y>>z, x>>z′, y>>z′, θα μπορούσαμε να πάρουμε $R_1=R_2$ ή $R_1<R_2$. Σε αυτή την περίπτωση θα είχαμε αντίστοιχα:

$QT(K')=(\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2))\vee((\neg\alpha_1)\wedge\alpha_2)$ (για $R_1=R_2$)

$QT(K')=(\neg\alpha_1)\wedge\alpha_2$ (για $R_1<R_2$)

Παρατηρήστε ότι στην πρώτη περίπτωση όπου:

$R_1=R_2\Leftrightarrow 2\cdot x+z+z'=2\cdot y-z-z'\Leftrightarrow y-x=z+z'$

λόγω του ότι αρχικά y>x (αφού $y-x=z+z'>0$), ισχύει ότι $QT(K)=(\neg\alpha_1)\wedge\alpha_2$, για τον αρχικό πίνακα K (πριν την ενημέρωση), ενώ μετά την ενημέρωση: $QT(K')=(\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2))\vee((\neg\alpha_1)\wedge\alpha_2)$. Δηλαδή η ενημέρωση προκάλεσε την «εμφάνιση» ενός «κρυμμένου» πιθανού κόσμου.

Στην δεύτερη περίπτωση όπου:

$R_1<R_2\Leftrightarrow 2\cdot x+z+z'<2\cdot y-z-z'\Leftrightarrow y-x>z+z'$

ισχύει ότι $QT(K)=QT(K')=(\neg\alpha_1)\wedge\alpha_2$, δηλαδή η αξιοπιστία του y είναι τόσο μεγαλύτερη του x, που ακόμα και η ενημέρωση M, η οποία αντιφάσκει με την δεύτερη γραμμή του πίνακα K, δεν είναι αρκετή ώστε να αλλάξει τις πεποιθήσεις μας για τον κόσμο.

Στην περίπτωση όπου:

$R_1>R_2\Leftrightarrow 2\cdot x+z+z'>2\cdot y-z-z'\Leftrightarrow y-x<z+z'$

όπως για παράδειγμα όταν y=x, είδαμε ότι:

$QT(K')=\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2)$.

Εδώ υπάρχουν κάποιες επιπλέον υποπεριπτώσεις ανάλογα με τις σχετικές τιμές των x,y. Αυτές οι υποπεριπτώσεις αφορούν την γνώση που είχαμε πριν την ενημέρωση και τις επιπτώσεις της ενημέρωσης στην γνώση αυτή, ή με άλλα λόγια, το αν υπάρχει διαφορά μεταξύ των προτάσεων QT(K) και QT(K′). Έτσι έχουμε:

	$(y-x)\in(-\infty,0)$	$y-x=0$	$(y-x)\in(0,z+z')$
QT(K)	$\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2)$	$(\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2))\vee((\neg\alpha_1)\wedge\alpha_2)$	$(\neg\alpha_1)\wedge\alpha_2$
QT(K′)	$\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2)$	$\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2)$	$\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2)$

Στον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε τις διαφορές μεταξύ των QT(K), QT(K′) για διάφορες σχετικές τιμές των x, y, z, z′, όπου και φαίνεται το αποτέλεσμα της ενημέρωσης για τις τιμές αυτές. Αν $y<x \Leftrightarrow y-x \in (-\infty,0)$, τότε η βάση μένει απαράλλαχτη πριν και μετά την ενημέρωση, διότι ούτως ή άλλως πιστεύαμε στον πιθανό κόσμο της πρώτης γραμμής του K, ο οποίος παραμένει μη αντιφατικός και μετά την ενημέρωση. Η περίπτωση y=x μελετήθηκε και παραπάνω, και προκαλεί την απόρριψη του ενός πιθανού κόσμου (αυτού που αντιφάσκει με την ενημέρωση). Τέλος, στην περίπτωση που y>x, αλλά που η διαφορά τους είναι μικρή ($y-x<z+z'$), τότε, ενώ αρχικά επικρατεί ο δεύτερος πιθανός κόσμος (πίνακας K, κόσμος $(\neg\alpha_1)\wedge\alpha_2$), η ενημέρωση M προκαλεί την απόρριψη του κόσμου αυτού (ο οποίος αντιφάσκει με την M) και την «εμφάνιση» ενός νέου πιθανού κόσμου στον K′, του $\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2)$, ο οποίος δεν αντιφάσκει με την M.

Παρατηρήστε ότι σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις ο περιορισμός $\alpha_1\leftrightarrow(\neg\alpha_2)$ δεν αναιρείται από το αποτέλεσμα της ενημέρωσης. Αυτό ισχύει διότι δεχτήκαμε ότι οι αριθμοί x, y είναι πολύ μεγαλύτεροι των z, z′. Αν αναιρέσουμε και αυτό τον περιορισμό τότε τα πράγματα περιπλέκονται. Θυμίζουμε ότι ο πίνακας K′ είναι ο:

$$K' = \begin{bmatrix} (x+z)-z'\cdot i & x\cdot i & 0 \\ z+(y-z')\cdot i & y & 0 \end{bmatrix}$$

και ότι οι σχετικές αξιοπιστίες γραμμών υπολογίστηκαν ως εξής:

$R_1=(z+z'+x)^w+x^w$

$R_2=|z+z'-y|^w+y^w$

Παρατηρούμε ότι για x=y, ανεξαρτήτως των παραμέτρων z, z′, w θα ισχύει $R_1>R_2$, που σημαίνει ότι η μη αντιφατική πρώτη γραμμή θα είναι πάντα πιο αξιόπιστη από την δεύτερη, συνεπώς $QT(K')=\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2)$.

Αν τα x, y είναι διαφορετικά, τότε οι παράμετροι παίζουν ρόλο, αφού μπορεί να ισχύει $R_1=R_2$ ή $R_1<R_2$. Εν γένει, μπορεί επίσης να διαφέρει και το αποτέλεσμα της συνάρτησης MN. Η κανονικοποιημένη μορφή της πρώτης γραμμής δίνει πάντα την λογική έκφραση: $QT(L_1)=\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2)$. Εντούτοις, η κανονικοποιημένη μορφή της δεύτερης δίνει διαφορετικά αποτελέσματα ανάλογα με τις σχετικές τιμές των z, z′, y:

	$z>y-z' \Leftrightarrow z+z'>y$	$z=y-z' \Leftrightarrow z+z'=y$	$z<y-z' \Leftrightarrow z+z'<y$
$QT(L_2)$	$\alpha_1\wedge\alpha_2$	α_2	$(\neg\alpha_1)\wedge\alpha_2$

Έτσι αν επιλεγεί η δεύτερη γραμμή, δηλαδή αν:

$R_2\geq R_1 \Leftrightarrow |z+z'-y|^w+y^w\geq(z+z'+x)^w+x^w$

τότε οι σχετικές τιμές των z, z′, y παίζουν μεγάλο ρόλο στο τελικό αποτέλεσμα.

Παρατηρούμε από τα παραπάνω ότι ακόμα και για ένα σχετικά απλό παράδειγμα, και ακόμα και για συγκεκριμένες παραμέτρους του μετασχηματισμού QT υπάρχουν διαφορετικά αποτελέσματα στα οποία μπορούμε να καταλήξουμε αλλάζοντας απλά τους δείκτες αξιοπιστίας των διαφόρων πιθανών κόσμων. Οι διαφορετικές περιπτώσεις είναι πάρα πολλές, και τα πράγματα περιπλέκονται ακόμα περισσότερο αν επιτρέψουμε την διαφοροποίηση των δεικτών αξιοπιστίας και εντός του ίδιου πιθανού κόσμου. Η παραπάνω ανάλυση μας έδωσε μία γεύση των δυσκολιών του προβλήματος.

Επίσης, παρατηρούμε ότι σε καμία από τις παραπάνω περιπτώσεις δεν πήραμε σαν αρχική βάση την $QT(K)\cong(\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2))\vee((\neg\alpha_1)\wedge\alpha_2)$ και σαν τελική την $QT(K')\cong\alpha_1$. Αυτό ήταν το επιθυμητό αποτέλεσμα της διόρθωσης. Λόγω του γεγονότος ότι η συνάρτηση επιλογής γραμμών που χρησιμοποιήσαμε δεν ήταν καθόλου ευέλικτη, αυτό δεν είναι δυνατό. Πράγματι για να έχουμε $QT(K)\cong(\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2))\vee((\neg\alpha_1\wedge\alpha_2)$ πρέπει να απαιτήσουμε x=y. Όπως είδαμε όμως, για τις συγκεκριμένες παραμέτρους του μετασχηματισμού επερωτήσεων που επιλέξαμε, όταν ισχύει x=y έχουμε πάντα $QT(K')\cong\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2)$. Τελικά δηλαδή για την συγκεκριμένη επιλογή παραμέτρων RE, RL, LS και την συγκεκριμένη ενημέρωση, δεν μπορούμε να εκτελέσουμε διόρθωση.

B.4 Ισοδυναμία Βάσεων Γνώσης – Ακολουθίες Ενημερώσεων

Στο επόμενο παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε σταθερές τιμές για τους δείκτες αξιοπιστίας και θα μελετήσουμε την ενημέρωση βάσεων που είναι λογικά ισοδύναμες, αλλά δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα. Στο παράδειγμα αυτό θα φανεί ότι η διατήρηση αντιφατικών κόσμων και ενημερώσεων επηρεάζει το αποτέλεσμα μελλοντικών ενημερώσεων. Έστω οι πίνακες:

$$K_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ i & i & 0\end{bmatrix}, TTI(K_1)=(a_1\wedge a_2\wedge T)\vee((\neg a_1)\wedge(\neg a_2)\wedge T)\cong a_1\leftrightarrow a_2$$

$$K_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ i & 0 & i\end{bmatrix}, TTI(K_2)=(a_1\wedge T\wedge a_3)\vee((\neg a_1)\wedge T\wedge(\neg a_3))\cong a_1\leftrightarrow a_3$$

$$K_3=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & i & i\end{bmatrix}, TTI(K_3)=(T\wedge a_2\wedge a_3)\vee(T\wedge(\neg a_2)\wedge(\neg a_3))\cong a_2\leftrightarrow a_3$$

$$K_4=\begin{bmatrix}2 & 2i & 0\\ 2i & 2 & 0\end{bmatrix}, TTI(K_4)=(a_1\wedge(\neg a_2)\wedge T)\vee((\neg a_1)\wedge a_2\wedge T)\cong a_1\leftrightarrow(\neg a_2)$$

Ο πίνακας K_4 έχει μεγαλύτερη αξιοπιστία ώστε να εξομοιωθεί η αρχή προτεραιότητας ενημέρωσης του Dalal. Έστω οι δύο ακολουθίες ενημερώσεων: $(K_1\bullet K_2)\bullet K_4$ και $(K_1\bullet K_3)\bullet K_4$. Επαληθεύεται εύκολα ότι ο αλγόριθμος του Dalal θα επιστρέψει:

$K_1\bullet^D K_2=K_1\bullet^D K_3=(\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3)\vee((\neg\alpha_1)\wedge(\neg\alpha_2)\wedge(\neg\alpha_3))\cong\alpha_1\leftrightarrow\alpha_2\leftrightarrow\alpha_3$.

Επίσης: $(K_1\bullet^D K_2)\bullet^D K_4=(K_1\bullet^D K_3)\bullet^D K_4=(\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2))\vee((\neg\alpha_1)\wedge\alpha_2)\cong\alpha_1\leftrightarrow(\neg\alpha_2)$.

Δηλαδή για τις δύο ακολουθίες ενημερώσεων που αναφέραμε, τα αποτελέσματα είναι τα ίδια για τον αλγόριθμο του Dalal. Εντούτοις, υπάρχει απώλεια πληροφορίας, αφού δεν έχουμε καμία γνώση για την αληθοτιμή του α_3 στον τελικό κόσμο. Θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι, λόγω της ενημέρωσης K_4 και της αρχής προτεραιότητας ενημέρωσης θα πρέπει να αναιρέσουμε την πληροφορία K_1 (όπως και συμβαίνει). Όμως, δεν έχουμε κανένα λόγο να αναιρέσουμε την πληροφορία K_2 στην πρώτη ακολουθία ενημερώσεων και την πληροφορία K_3 στην δεύτερη. Άρα το σωστό διαισθητικά αποτέλεσμα των δύο ακολουθιών ενημερώσεων θα έπρεπε να είναι:

$(K_1 \bullet K_2) \bullet K_4 = (\alpha_1 \leftrightarrow (\neg\alpha_2)) \wedge (\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_3) \cong \alpha_1 \leftrightarrow (\neg\alpha_2) \leftrightarrow \alpha_3$

$(K_1 \bullet K_3) \bullet K_4 = (\alpha_1 \leftrightarrow (\neg\alpha_2)) \wedge (\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_3) \cong \alpha_1 \leftrightarrow (\neg\alpha_2) \leftrightarrow (\neg\alpha_3)$

Η παραπάνω περίπτωση δείχνει την αδυναμία κάποιων υπαρχόντων αλγορίθμων, οι οποίοι, μη διατηρώντας τις επιμέρους ενημερώσεις και τους επιμέρους αντιφατικούς κόσμους, χάνουν πληροφορία μακροπρόθεσμα, για συγκεκριμένες ακολουθίες ενημερώσεων.

Ας δούμε τις δύο παραπάνω ακολουθίες ενημερώσεων για την περίπτωση των πινάκων. Για τις παραμέτρους του μετασχηματισμού QT θα χρησιμοποιήσουμε τις συναρτήσεις των προτάσεων A.12 (RE), A.8 (w=1, RL), A.9 (LS). Έτσι, μετά από πράξεις παίρνουμε:

$$K_1 \bullet K_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1+i & 1 & i \\ 1+i & i & 1 \\ 2i & i & i \end{bmatrix}$$

$$K_1 \bullet K_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1+i & i \\ i & 1+i & 1 \\ i & 2i & i \end{bmatrix}$$

Εύκολα επαληθεύεται μετά από πράξεις ότι για τις συγκεκριμένες παραμέτρους που επιλέξαμε για τον μετασχηματισμό QT, ισχύει:

$QT(K_1) \cong QT(K_2) \cong TTI(K_1) \cong TTI(K_2) \cong (\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) \vee ((\neg\alpha_1) \wedge (\neg\alpha_2) \wedge (\neg\alpha_3)) \cong \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2 \leftrightarrow \alpha_3$.

Άρα, το αποτέλεσμα είναι ισοδύναμο του αποτελέσματος του αλγορίθμου του Dalal.

Συνεχίζοντας με την δεύτερη ενημέρωση προκύπτουν οι πίνακες:

$$K^{(1)} = (K_1 \bullet K_2) \bullet K_4 = \begin{bmatrix} 4 & 1+2i & 1 \\ 2+2i & 3 & 1 \\ 3+i & 1+2i & i \\ 1+3i & 3 & i \\ 3+i & 3i & 1 \\ 1+3i & 2+i & 1 \\ 2+2i & 3i & i \\ 4i & 2+i & i \end{bmatrix}$$

$$K^{(2)} = (K_1 \bullet K_3) \bullet K_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2+2i & 1 \\ 1+2i & 4 & 1 \\ 3 & 1+3i & i \\ 1+2i & 3+i & i \\ 2+i & 1+3i & 1 \\ 3i & 3+i & 1 \\ 2+i & 4i & i \\ 3i & 2+2i & i \end{bmatrix}$$

Μετά από πράξεις, για τον μετασχηματισμό QT έχουμε:

$$RE(K^{(1)}) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, RL(RE(K^{(1)}) = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$RE(K^{(2)}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, RL(RE(K^{(2)}) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

που σημαίνει ότι τελικά:

$QT(K^{(1)})=(\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2)\wedge\alpha_3)\vee((\neg\alpha_1)\wedge\alpha_2\wedge(\neg\alpha_3))\vee(\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2)\wedge\alpha_3)\vee((\neg\alpha_1)\wedge\alpha_2\wedge(\neg\alpha_3))\Rightarrow$

$\Rightarrow QT(K^{(1)})\equiv\alpha_1\leftrightarrow(\neg\alpha_2)\leftrightarrow\alpha_3$

$QT(K^{(2)})=((\neg\alpha_1)\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3)\vee(\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2)\wedge(\neg\alpha_3))\vee((\neg\alpha_1)\wedge\alpha_2\wedge\alpha_3)\vee(\alpha_1\wedge(\neg\alpha_2)\wedge(\neg\alpha_3))\Rightarrow$
$\Rightarrow QT(K^{(2)})\equiv(\neg\alpha_1)\leftrightarrow\alpha_2\leftrightarrow\alpha_3$

Οι παραπάνω προτάσεις δείχνουν ότι πήραμε το διαισθητικά επιθυμητό αποτέλεσμα. Παρατηρήστε ότι όλοι οι κόσμοι και των δύο πινάκων είναι αντιφατικοί. Επίσης, κάποιοι από τους πλέον αξιόπιστους κόσμους των πινάκων $K^{(1)}$, $K^{(2)}$ δεν θα υπήρχαν αν είχαμε αποκόψει τους αντιφατικούς κόσμους στις ενημερώσεις: $K_1 \bullet K_2$ και $K_1 \bullet K_3$ αντίστοιχα. Αυτό δείχνει την σημασία της διατήρησης των αντιφατικών κόσμων και ενημερώσεων. Η αποκοπή των αντιφατικών κόσμων θα έδινε αποτελέσματα ισοδύναμα του αλγορίθμου του Dalal, ακόμα και μετά την δεύτερη ενημέρωση.

B.5 Γενικά Σχόλια

Τα παραπάνω παραδείγματα έδειξαν κάποιες από τις ιδιότητες του αλγορίθμου και αποτελούν τροφή για περαιτέρω μελέτη της επίδρασης των διαφόρων παραμέτρων πάνω στο αποτέλεσμα της ενημέρωσης. Είδαμε τις επιδράσεις της αρνητικής γνώσης καθώς και τα αποτελέσματα μίας λάθος επιλογής παραμέτρων για τον μετασχηματισμό QT. Είδαμε επίσης ότι για την αρνητική γνώση η συνάρτηση TTI δεν δίνει την σωστή σημασιολογία μίας ενημέρωσης. Ο δείκτης αξιοπιστίας RF είναι μία ποσότητα η οποία επιδρά άμεσα πάνω στο αποτέλεσμα της ενημέρωσης και διαφορετικές επιλογές για τον δείκτη αυτόν δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα ενημέρωσης. Επίσης, είδαμε τους λόγους για τους οποίους διατηρούμε τις αντιφατικές ενημερώσεις και τους αντιφατικούς κόσμους, το γιατί οι επιμέρους ενημερώσεις μετράνε σε μία ακολουθία ενημερώσεων και το γιατί δύο λογικά ισοδύναμες βάσεις, οι οποίες δίνουν ισοδύναμες απαντήσεις σε επερωτήσεις, δεν είναι απαραίτητα και ισοδύναμες όσον αφορά τις ενημερώσεις.

Αναφορές

[1] Alchourron, Gärdenfors, Makinson, "On the Logic of Theory Change: Partial Meet Contraction and Revision Functions", 1985, The Journal of Symbolic Logic 50, pp.510-530.

[2] A. Borgida, "Language Features for flexible handling of exceptions in information systems", ACM – Transactions on Database Systems, 10(4):565-603, 1985.

[3] R. Cattell, "ODMG-93: A Standard for Object-Oriented DBMSs", ACM SIGMOD Conference, 1994.

[4] Alison Cawsey, Julia Galliers, Brian Logan, Steven Reece, Karen Sparck Jones, "Revising Beliefs and Intentions: A Unified Framework for Agent Interaction".

[5] P. Chen, "The Entity-Relationship Model - Toward a Unified View of Data", ACM Transactions on Database Systems, 1(1), pp. 9-36, 1976.

[6] Church, "Introduction to Mathematical Logic", Volume I, Princeton, Princeton University Press, 1956.

[7] G. Codd, "A Relational Model for Large Shared Data Banks", Communications of the ACM, 13 (6), June 1970, pp. 377-387.

[8] M. Dalal, "Updates in Propositional Databases", Technical Report, DCS-TR-222, Department of Computer Science, Rutgers University, February 1988.

[9] M. Dalal, "Investigations Into a Theory of Knowledge Base Revision: Preliminary Report", In Proceedings of the Seventh National Conference on Artificial Intelligence, pp. 475-479, 1988.

[10] A. Darwiche and J. Pearl, "On the Logic of Iterated Belief Revision", UCLA Cognitive Systems Laboratory, Technical Report (R-202) In R. Fagin (Ed.), Proceedings of the 1994 Conference on Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge (TARK `94), Pacific Grove, CA, 5-23, March 13-16, 1994. In Artificial Intelligence, 89(1-2):1-29, 1997.

[11] James P. Delgrande, "Considerations on a Similarity-Based Approach to Belief Change", 16th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'99), Stockholm, Sweden, August 1999, pp. 180-185.

[12] Jon Doyle, "A Truth Maintenance System", Artificial Intelligence 12 (1979), 231-272.

[13] Jon Doyle, "The foundations of psychology – a logico-computational inquiry into the concept of mind", February 1982, Philosophy and AI: Essays at the interface?

[14] Fagin, Ullman, Vardi, "On the Semantics of Updates in Databases", Proceedings of Second ACM SIGACT-SIGMOD Conference, Atlanta, pp. 352-365, 1983.

[15] Flouris, Plexousakis, "Belief Revision Using Table Transformation", Technical Report TR-290, July 2001, ICS-FORTH.

[16] Flouris, Plexousakis, "Belief Revision in Propositional Knowledge Bases", to appear in the 8th Panhellenic Conference on Informatics, Nicosia, Cyprus, November 2001.

[17] P. Gardenfors, "Belief Revision: An Introduction", 1992, pp. 1-20 in Belief Revision, ed. by P. Gärdenfors, Cambridge University Press. Web Site: http://lucs.fil.lu.se/staff/Peter.Gardenfors/Abstracts/belief.CUP.html

[18] P. Gardenfors, "The dynamics of knowledge and belief: Foundational vs. coherence theories", Revue Internationale de Philosophie 44, pp. 24-46. Reprinted in Knowledge, Belief and Strategic Interaction, ed. by Bicchieri and M. L. dalla Chiara, Cambridge University Press, Cambridge, 1992, pp. 377-396.

[19] Sven Ove Hansson, "In Defense of Base Contraction", Synthese 91, pp. 239-245, 1992.

[20] Katsuno and Mendelzon, "Propositional Knowledge Base Revision and Minimal Change", KRR-TR-90-3, March 1990, Technical Report on Knowledge Representation and Reasoning, University of Toronto.

[21] Katsuno, Mendelzon, "On the Difference Between Updating a Logical Database and Revising it", in Belief Revision, Gardenfors, Cambridge Press, 1992.

[22] Arthur Keller, Marianne Winslett Wilkins, "On the Use of an Extended Relational Model to Handle Changing Incomplete Information", IEEE Transactions on Software Engineering, Vol. SE-11, No 7, July 1985, pp.620-633.

[23] Gabriele Kern-Isberner, "Postulates for conditional belief revision", International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI), Stockholm, Sweden, 1999, pp. 186-191.

[24] Paolo Liberatore, "The Complexity of Iterated Belief Revision", In Proceedings of the Sixth International Conference on Database Theory (ICDT'97), pages 276-290, 1997.

[25] Makinson, "How to Give it up: A Survey of some Formal Aspects of the Logic of Theory Change", 1985, Synthese 62, pp. 347-363.

[26] Mylopoulos, Borgida, Jarke, Koubarakis, "Telos: Representing Knowledge about Information Systems", ACM Transactions on Information Systems, 8(4), 1990.

[27] Bernhard Nebel, "A Knowledge Level Analysis of Belief Revision", In Proceedings of the First International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning, pp. 301-311, 1989.

[28] Nils J. Nilsson, "Artificial Intelligence: A New Synthesis", Morgan Kaufmann, ISBN: 1-55860-535-5.

[29] Nick Roussopoulos, John Mylopoulos, "Using Semantic Networks for Database Management", VLDB Conference 1975, pp. 144-172.

[30] Sowa, "Principles of Semantic Networks", Morgan Kaufmann Publishers, 1991.

[31] Τζουβάρας, «Στοιχεία Μαθηματικής Λογικής», Θεσσαλονίκη Π. Ζήτη, 1987.

[32] Renata Wassermann, "An algorithm for belief revision", Proceedings of the KR2000 Conference, pp.345-352.

[33] Andreas Weber, "Updating Propositional Formulas", In L. Kerschberg, editor, Expert Database Systems, pp. 487-500, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., 1987.

[34] Mary-Anne Williams, David M. Williams, "A Belief Revision System for the World Wide Web", Web Site: http://u2.newcastle.edu.au/webworld/ai-internet.html.

[35] Mary-Anne Williams, "Anytime Belief Revision", 1997, International Joint Conference on Artificial Intelligence, 1997.

[36] Marianne Winslett Wilkins, "A Model-Theoretic Approach to Updating Logical Databases", Department of Computer Science, Stanford University, Technical Report STAN-CS-86-1096, January 1986, A preliminary version appeared in Proceedings of the 5th ACM PODS, March 1986.